



Gravitino dans l'Univers primordial: un modèle d'extra-dimension et de matière noire

David Gherson

► To cite this version:

David Gherson. Gravitino dans l'Univers primordial: un modèle d'extra-dimension et de matière noire. Physique mathématique [math-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2007. Français. NNT: . tel-00283293

HAL Id: tel-00283293

<https://theses.hal.science/tel-00283293>

Submitted on 29 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1
Institut de Physique Nucléaire de Lyon

Mémoire de thèse
pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université Claude Bernard - Lyon 1
Spécialité : Physique théorique
au titre de l'École doctorale de Physique et Astrophysique fondamentale Rhône-Alpes

présentée et soutenue publiquement le 30 Octobre 2007
par M. David GHERSON

Gravitino dans l'Univers primordial : un modèle d'extra-dimension et de matière noire

Je remercie mon Directeur de thèse, Aldo Deandrea, pour ses conseils, son aide et sa gentillesse tout au long de cette thèse et, aussi, Karsten Jedamzik, Gilbert Mourtaka, pour leurs conseils et leur sympathie. Je remercie José Pacheco de m'avoir initié à la Cosmologie.

Je remercie l'ensemble de mes professeurs du DEA de Physique théorique de Lyon pour leur précieux enseignement et particulièrement le directeur du DEA, François Delduc.

Je remercie tous mes amis de l'IPNL pour leur soutien et leur sympathie.

Je remercie, enfin, ma famille pour son soutien.

Sommaire

1	Introduction	9
2	Cosmologie	15
2.1	Le modèle du Big-Bang	15
2.1.1	La métrique de Robertson et Walker	15
2.1.2	Les équations d'Einstein	16
2.1.3	L'équation de Friedmann	16
2.1.4	La singularité initiale	17
2.1.5	Les Géométries de l'Univers	18
2.2	L'Univers aujourd'hui : observations et conséquences	18
2.2.1	Le fonds diffus cosmologique : Cosmic Microwave Background Radiation	18
2.2.2	Les abondances des éléments légers, le nombre de baryons, et le problème du Lithium	19
2.2.3	L'expansion et l'accélération de l'Univers	20
2.3	La matière noire	21
2.3.1	Théorie et nature de la matière noire	21
2.4	La Quintessence	23
2.4.1	Quintessence Vs constante cosmologique	23
2.4.2	Les potentiels attracteurs	25
2.4.3	Petite digression sur l'énergie du vide	25
2.5	L'inflation	26
2.6	Conclusion	30
3	Au-delà du Modèle Standard	33
3.1	Introduction	33
3.2	Supersymétrie : des effets intéressants	34
3.3	Notations	35
3.4	L'algèbre	36
3.5	Théorie des champs	38
3.5.1	Le lagrangien libre globalement supersymétrique	38
3.5.2	Les interactions du multiplet chiral	39
3.5.3	Théorie de jauge supersymétrique	40
3.5.4	Les modèles $\mathcal{N} \geq 2$	41
3.5.5	Quelques mots sur le formalisme des superchamps	42

3.6	Les modèles supersymétriques à basse énergie	42
3.6.1	La zoologie du Modèle Standard Supersymétrique Minimal	43
3.6.2	Le modèle	44
3.6.3	La brisure douce de la supersymétrie	45
3.7	La brisure de la supersymétrie	46
3.7.1	Terme F et terme D	47
3.7.2	Supersymétrie locale ou Supergravité	49
3.7.3	Supergravité	49
3.7.4	Le mécanisme de Super-Higgs	51
3.7.5	Couplage de la Supergravité à la matière	52
3.7.6	Théorie effective aux basses énergies	53
3.7.7	Conclusion sur la brisure de la supersymétrie locale	55
3.8	Vers une "Théorie de Tout"	56
3.8.1	Les problèmes de la gravité quantique	56
3.8.2	Introduction à la théorie des cordes	57
3.8.3	Les grandes classes de théories de cordes	59
3.8.4	La structure non-perturbative de la théorie	60
3.8.5	Compactifications, prédictions et limites des théories de supercordes	63
3.9	Les dimensions supplémentaires	64
3.9.1	Pourquoi (pas) des dimensions supplémentaires ?	64
3.9.2	Les différents types de modèles	65
3.9.3	Signatures expérimentales	66
3.9.4	Des dimensions en moins à haute énergie ?	67
3.10	Conclusion	67
4	Gravitino et Supergravité	69
4.1	Approche heuristique de la supergravité	69
4.2	Supergravité minimale	71
4.3	Le Lagrangien général de supergravité	74
4.3.1	Les termes d'interactions pertinents du gravitino	78
4.4	Les théories de cordes et la supergravité	79
4.5	Le gravitino	79
4.5.1	Notations : rappels	79
4.5.2	Les équations de Rarita-Schwinger	80
4.5.3	Fonction d'onde et somme sur les états de spin	81
4.5.4	Somme sur les états d'hélicité $\pm 3/2$ pour un gravitino de très grande masse ou de masse nulle	84
4.6	Calcul de l'abondance primordiale de gravitinos	86
4.6.1	Les équations de Boltzmann	87
4.6.2	Les interactions du gravitino	89
4.6.3	Les processus de production	90
4.6.4	Le calcul par la méthode des "hard thermal loop resummation"	93
4.6.5	Résultat pour l'abondance	97

4.6.6	Calcul de l'abondance pour des masses de gravitino non négligeables par rapport à l'échelle d'énergie	98
5	Extra-dimension et gravitino : le modèle	103
5.1	Contexte	103
5.2	Introduction détaillée au modèle	103
5.3	Interaction entre KK gravitinos et MSSM	106
5.4	Abondances des KK modes	108
5.5	Désintégration des modes de gravitino	109
5.6	Neutralinos	111
5.7	Le modèle	113
5.7.1	Les masses	113
5.7.2	Valeurs numériques	114
5.7.3	Les équations de contrainte	114
5.8	Gravitons	116
5.9	Resultats	119
6	Conclusions et perspectives	131
7	Annexe : cas $m_{lsp} = 200$ GeV	133
	Références	142

Chapitre 1

Introduction

Une nouvelle ère dans l'histoire de la cosmologie a commencé durant les dernières années. Les observations [1],[2] ont apporté de nouvelles perspectives dans la quête d'une théorie globale du cosmos.

Le scénario du hot big bang semble se confirmer. Pourtant, de nombreux mystères et "zones sombres" de notre compréhension demeurent. Le mot "sombre" prend toute sa valeur lorsqu'on pense à la présence de matière noire et d'énergie noire. La matière noire n'est pas de la matière baryonique mais une autre forme de matière qui serait révélatrice d'une physique au-delà du modèle standard de la physique des particules. La matière noire dans l'univers plat qui semble être le nôtre d'après les observations représenterait environ 21% de la quantité totale d'énergie-matière dans l'Univers, la matière ordinaire 4% et l'énergie noire 75%.

Cette dernière semble encore plus mystérieuse que la matière noire. Pourtant, elle n'est que l'expression de l'énergie du vide d'une théorie qui nous échappe encore. L'énergie noire que certains nomment la quintessence (cinquième élément) peut être décrite par un fluide à pression négative qui emplirait l'Univers et dont l'action est l'accélération de l'Univers. On peut la décrire soit par une constante cosmologique dans les équations d'Einstein, soit par un champ scalaire dynamique muni d'un potentiel. Nous reviendrons sur ces points dans la partie du présent manuscrit concernant la cosmologie.

La matière noire quant à elle fait l'objet de tentatives théoriques pour la décrire et de tentatives expérimentales pour la mettre en évidence. Des travaux sont entrepris pour la détecter directement et indirectement. Concernant l'approche théorique, de nombreux candidats ont été proposés dans le cadre de la physique des particules dite au-delà du modèle standard.

Parmi les extensions possibles du modèle standard de la physique des particules, la supersymétrie est l'extension favorite des physiciens des hautes énergies. Cette symétrie relie boson à fermion et fermion à boson. Elle implique la présence d'un spectre de particules partenaires supersymétriques des particules du modèle standard au-delà de l'échelle électrofaible. Cette extension du modèle standard est appréciée des physiciens car le problème dit de la hiérarchie entre l'échelle électrofaible et l'échelle de Planck est résolu par la supersymétrie "basse énergie" c'est-à-dire avec des particules supersymétriques de masse supérieures ou égales à l'échelle électrofaible jusqu'à des masses de l'ordre de la dizaine de TeV. L'unification des trois couplages de jauge à haute énergie se produit miraculeusement

avec l'adjonction du spectre des particules supersymétriques. Enfin, une symétrie globale, la R-parité réminiscence basse énergie d'une symétrie évitant les interactions qui changent la saveur, permet la présence d'une particule supersymétrique stable appelé LSP (Lightest Supersymmetric Particle) qui pourrait être la composante principale de la matière noire cosmologique. D'autres raisons plus fondamentales ont introduit la supersymétrie comme un candidat naturel à l'extension du modèle standard : la supersymétrie permet d'étendre l'algèbre de Poincaré des transformations d'espace-temps.

Ce dernier point n'est pas anodin pour la suite de notre exposé. En effet, cette extension de l'algèbre de Poincaré fait rentrer naturellement la gravité dans le domaine de la physique des particules puisque la gravité au sens einsteinien du terme est directement reliée à l'espace-temps donc à l'algèbre de Poincaré. En l'occurrence, la gravité fait son apparition dans la théorie supersymétrique lorsque les transformations de supersymétrie sont rendues locales. Cette extension haute énergie de la supersymétrie globale s'appelle donc la supergravité. Deux nouveaux type de particules font leur apparition : le graviton et le gravitino. Le graviton possède un spin 2 et le gravitino qui est son partenaire supersymétrique un spin $3/2$. Le gravitino est au centre des travaux du présent manuscrit comme nous le verrons par la suite.

Après cette brève introduction à la supersymétrie, revenons aux aspects cosmologiques. Nos travaux, comme le laisse présager le paragraphe précédent, font l'hypothèse d'une particule supersymétrique stable, le LSP, pour rendre compte de la matière noire dans l'Univers. D'autres scénarii ont été envisagés par la communauté scientifique. On peut citer la théorie MOND [3] qui prévoit une modification de la gravité avec l'échelle. On peut citer d'autres candidats prévus par des théories sans supersymétrie, des théories avec dimensions supplémentaires comme UED (Universal Extra Dimension) qui prévoient une particule stable (Lightest Kaluza-Klein Particle) qui est le candidat à la matière noire [4]. Enfin, il existe des modèles récents [5] comme le ν MSM qui est le modèle standard plus des neutrinos massifs droits et gauches avec le neutrino droit le plus léger candidat pour la matière noire.

Concernant nos travaux, nous nous sommes placés, dans un modèle supersymétrique avec pour objectif de rendre compte de la quantité observée de matière noire. Cependant notre modèle supersymétrique n'est pas restreint au classique MSSM (Minimal Supersymétrique Standard Model). Le MSSM est le modèle supersymétrique dont le contenu en particules est minimal. Notre modèle est un modèle de supergravité au sens qu'il contient en plus du MSSM, le gravitino. Nous utiliserons le Lagrangien de supergravité pour déterminer les interactions du gravitino avec le MSSM.

Pourquoi travailler dans ce contexte ? Quelles sont les motivations d'un tel choix ?

Les raisons sont d'ordre théorique. Depuis plus de vingt ans, une théorie appelée théorie des cordes tentent d'inclure la gravité dans le contexte de la théorie quantique des champs : réaliser le rêve d'avoir une théorie qui permette de tout décrire dans un seul schéma théorique. En effet, l'interaction gravitationnelle, à la différence des interactions faible, forte et électromagnétique, ne peut pas être décrite dans le cadre d'une théorie quantique des champs. Si l'on tente de décrire le champ de gravité ou autrement dit la métrique comme un champ quantique, la théorie devient très vite divergente non renormalisable. La théo-

rie des cordes postule que les particules ne sont plus des points sans dimension mais des objets unidimensionnels des “cordes”. Lorsque l’on quantifie le spectre de vibrations de ces cordes, on obtient des particules de différents spins et, parmi elles, une particule de spin 2, identifiée au graviton. Les divergences de la théorie quantique des champs disparaissent car l’interaction n’est plus ponctuel : on ne peut en effet plus rapprocher de manière infinie deux particules car la dimension de la corde donne une limite à ce rapprochement. Pourtant, la théorie présente des anomalies, au sens théorie des champs du mot, à 4 dimensions : ces anomalies disparaissent lorsque la théorie possède au moins 26 dimensions (25 d’espace, une de temps) pour le cas de la corde dite bosonique et au moins 10 dimensions (9 d’espace, une de temps) pour les théories dites de supercordes, théories dans lesquelles des fermions apparaissent : dans ces théories, les particules peuvent être perçues non plus comme des excitations de la corde dans l’espace usuel¹ mais comme des excitations de la corde dans le superspace (c’est-à-dire l’espace usuel plus deux coordonnées grassmanniennes). Il existe 5 théories de supercordes reliées entre elles par différentes relation de dualité. Une de ces relations de dualité, la S-dualité, permet de prédire l’existence à couplage fort d’une théorie à 11 dimensions, la M-théorie. Nous reviendrons sur cette notion de dualité dans un paragraphe consacré aux théories de cordes. La M-théorie² est une théorie non écrite dans le sens où son action est inconnue. Par contre, son action basse énergie serait, du point de vue théorie des champs, une supergravité à 11 dimensions [6] avec un générateur de supersymétrie ($N = 1$). La supergravité prend un nouveau statut : celui de théorie effective. Lors de sa création dans les années 1970, les scientifiques pensèrent qu’ils pouvaient s’agir d’une théorie du tout mais ils s’aperçurent que la théorie était non renormalisable. L’intérêt pour cette théorie diminua un peu jusqu’à l’avènement des théories de supercordes et de la M-théorie qui renouvela l’intérêt pour cette théorie en l’interprétant comme une théorie effective basse énergie d’une théorie de cordes, et donc valable jusqu’à une certaine énergie. La M-théorie serait au sens de la théorie des cordes la théorie du tout : chacune des cinq théories de supercordes peut être vue comme un développement perturbatif autour d’un vide différent de la M-théorie. Cette théorie, comme nous l’avons écrit, vit dans un espace à 11 dimensions (10 d’espace et une de temps). La dimension supplémentaire par rapport aux autres théories de supercordes c’est-à-dire la 11 ème serait plus grande que les autres pour permettre l’unification des couplages de jauge avec la gravité. Le schéma géométrique de la théorie est le suivant : deux membranes à 10 dimensions avec les groupes de jauge E_8 sur chacune, séparée par la 11 ème dimension de géométrie S^1/Z_2 . Une membrane correspondrait à notre monde, l’autre pourrait décrire le secteur caché nécessaire à la brisure de la supersymétrie. Comme la dimension séparant les membranes est plus grande que les autres dimensions supplémentaires, l’Univers a pu connaître une phase de son histoire où il est apparu avoir 5 dimensions : deux membranes à 4d séparées par une dimension supplémentaire. En effet, plus l’énergie est élevée, plus petite est la taille de la dimension accessible.

Bien que tous les modèles avec dimensions supplémentaires ne se rattache pas à une théorie

¹usuel... mais avec 9 dimensions d’espace !

²M pour mysterious, magic, mother, matrix...

de supercordes, de très nombreux travaux ont été faits à 5 dimensions. Deux principales directions ont été suivies : le modèle ADD [7], [8] où l'extra-dimension est plate et les modèles de Randall-Sundrum [9] où l'extra-dimension est courbe. Dans ces modèles, le problème de la hiérarchie est réglée par la taille et la géométrie de l'extra-dimension : la supersymétrie peut ne pas être intégrée. Il existe des versions supersymétriques [10],[11], [12], [13], [14] de ces modèles qui peuvent se rattacher de manière plus naturelle aux théories de supercordes. Les travaux entrepris sur les dimensions supplémentaires ont été faits, soit sur des modèles pour traiter de la phénoménologie des particules, soit sur des modèles traitant de cosmologie (brane world) [15]. Nous reviendrons dans un paragraphe sur les différents modèles d'extra-dimension.

Nous nous sommes placés dans la présente étude dans un modèle de supergravité à cinq dimensions avec seulement les champs de supergravité³(graviton, gravitino) autorisés à se déplacer dans l'extra-dimension et les champs de matière et de jauge contraints à rester sur la brane. C'est le modèle qui se rapproche de la manière la plus singulière de la M -théorie. Dans cette théorie, seuls les champs de supergravité sont autorisés à se propager dans le bulk c'est-à-dire dans toutes les dimensions et, au niveau géométrique, comme nous l'avons expliqué, la M-théorie est décrite par deux membranes séparées par une extra-dimension de géométrie S^1/Z_2 . Notre modèle possède cinq dimensions, il est supersymétrique avec deux membranes à 4 d séparés par une extra-dimension compacte, S^1/Z_2 , c'est-à-dire un cercle muni de la symétrie Z_2 (orbifold). On dit que les membranes se situent au points fixes de l'orbifold (points fixes sous Z_2). Les membranes n'ont pas de tension et le modèle ne possède pas de constante cosmologique. [16] ont montré que ce modèle ne permettait pas de retrouver l'équation de Friedmann classique. [17] ont montré qu'en ajoutant une constante cosmologique sur la membrane et dans le bulk, donnant ainsi une géométrie type Randall-Sundrum, l'équation de Friedmann usuelle était retrouvée en dessous d'une certaine énergie. Enfin, [18] ont montré que lorsque le radion était stabilisé (le radion est le champ paramétrisant les fluctuations de l'extra-dimension) l'équation usuelle de Friedmann était retrouvée dans les modèles à constante cosmologique nulle. Le modèle que nous considérons possède donc la caractéristique d'avoir un champ de radion stabilisé.

Nous avons confronté les observations (densité de matière noire dans l'Univers, nucléosynthèse primordiale) à la présence d'une particule, le gravitino, produit dans le bain thermique qui a précédé l'inflation par des processus de collisions inélastiques. Nous avons supposé que la matière noire était composée d'une partie thermique et d'une partie non thermique provenant de la désintégration du gravitino et de ses modes de Kaluza-Klein. Cette matière noire est supposée être le neutralino qui, dans le modèle, est le LSP. Dans le contexte d'une dimension supplémentaire, nous avons pu conclure qu'il existe des limites sur la taille de la cinquième dimension compacte.

La present document s'organisera comme suit. Dans une première partie, nous ferons une introduction à la cosmologie.

³A 5 dimensions, le supermultiplet de supergravité possède aussi une particule vecteur, le graviphoton, que nous n'avons pas considéré dans le modèle

Dans une seconde partie, nous traiterons de physique des particules et de supersymétrie. Nous présenterons les modèles d'extra-dimension et ferons une introduction aux théories de cordes.

Dans une troisième partie, nous introduirons la supergravité, le Lagrangien général, les interactions du gravitino avec le MSSM et des outils de calcul pour l'évaluation des sections efficaces de production du gravitino. Nous fournirons le calcul de l'abondance du premier mode de gravitino. Nous donnerons ensuite le calcul de l'abondance pour les modes plus lourds.

Dans une quatrième partie, nous présenterons le modèle et les résultats avec, entre autres, une estimation de l'impact de gravitons de Kaluza-Klein sur la nucléosynthèse primordiale des éléments légers. Ce modèle a donné lieu à une publication :

“Constraints on the size of the extra-dimension from Kaluza-Klein gravitino decay”, David Gherson, Phys.Rev.D76 :043507,2007.

Nous terminerons par les perspectives du présent travail au niveau de problèmes cosmologiques comme la formation des structures et le problème de la production de lithium 6 et 7, mais aussi, nous évoquerons l'extension possible à d'autres modèles d'extra-dimension.

Chapitre 2

Cosmologie

2.1 Le modèle du Big-Bang

2.1.1 La métrique de Robertson et Walker

L'Univers est homogène et semble plat sur des distances de l'ordre d'une centaine de mégaparsecs. On peut donc le décrire grâce à la métrique maximale symétrique de Robertson et Walker :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.1)$$

Cette métrique constitue le cadre géométrique de la cosmologie de Friedmann et Lemaître. ds correspond à cdt pour une horloge au repos. (t, r, θ, ϕ) sont les coordonnées appelées 'comoving coordinates' en anglais : un observateur au repos dans ces coordonnées le reste i.e (r, θ, ϕ) inchangés. $a(t)$ est le facteur d'échelle. Il possède la dimension d'une longueur¹. L'univers évolue au gré de ses variations. r est sans dimension : il varie entre 0 et 1 pour $k = 1$. k que l'on nomme courbure, peut être égale à 1, 0 ou -1 pour des espaces à courbures spatiales constante. Quand $k = 1$, on parle d'espace fermé. Quand $k = 0$, on parle d'espace plat ou euclidien. Quand $k = -1$, on parle d'espace ouvert.

Les mesures actuelles sur les supernovae nous placent dans un Univers en expansion où $k = 0$ (espace euclidien). Nous vivons sur l'hypersurface à 4 dimensions (3 d'espace, une de temps) d'une hypersphère. L'hypersurface à trois dimensions se dilate. On peut facilement se représenter les choses en retirant une dimension : nous serions des êtres à deux dimensions vivant à la surface d'une sphère qui gonfle au cours du temps. Ainsi, un observateur qui se déplacerait toujours dans la même direction à une vitesse supra-lumineuse (pour pouvoir sortir de sa surface causale) finirait par revenir à son point de départ.

Le cadre géométrique de l'Univers est maintenant posé. Nous allons maintenant décrire la dynamique des objets sur cette trame géométrique. Cette dynamique est donnée par les équations d'Einstein.

¹Nous avons suivi la convention de Kolb et Turner [19].

2.1.2 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein relient la géométrie de l'espace-temps à l'énergie et à la matière. La présence de matière ou d'énergie induisent une modification de la géométrie. Ainsi, la gravitation s'explique simplement par le fait que les trajectoires suivent la géométrie courbée par la matière ou l'énergie. La gravitation est une force fondamentale comme les trois autres forces : sa particularité est de s'expliquer géométriquement. Les équations d'Einstein sont :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Où $g_{\mu\nu}$ est la métrique², $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure ou tenseur de Ricci, R est la contraction du tenseur de Ricci, $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion, G la constante universelle de la gravitation et enfin Λ est la constante cosmologique qu'Einstein introduisit originellement pour éviter l'expansion de l'Univers. On peut, en effet, toujours écrire les équations d'Einstein à un terme proportionnel à $g_{\mu\nu}$ près car l'on a, d'une part, $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ par conservation de l'énergie, d'autre part $\nabla^\nu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = 0$ mais aussi $\nabla^\nu g_{\mu\nu} = 0$ donc quand on intègre $\nabla^\nu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = \nabla^\nu T_{\mu\nu}$, on peut rajouter un terme proportionnel à $g_{\mu\nu}$. Nous reparlerons de la question de la constante cosmologique lorsque nous aborderons le chapitre sur la quintessence. Cependant, nous pouvons, d'ors et déjà, déplacer le terme $\Lambda g_{\mu\nu}$ dans la partie énergie des équations d'Einstein et écrire que la constante cosmologique est le tenseur énergie impulsion : $t_{\mu\nu} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}g_{\mu\nu}$.

2.1.3 L'équation de Friedmann

Jusqu'à présent, nous n'avions pas défini le tenseur énergie-impulsion. Pour un fluide parfait de densité d'énergie ρ et de pression P :

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

où $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ désigne la quadrivitesse et où P et ρ dépendent du temps. Le fluide est choisi parfait car c'est la plus simple réalisation d'un tenseur énergie-impulsion diagonal et qui, par isotropie, a toutes ses composantes spatiales égales. En effet, le tenseur énergie impulsion doit être consistant avec les symétries de la métrique. Notons qu'un fluide imparfait avec une viscosité de volume pourrait aussi satisfaire les exigences de symétrie de la métrique.

On peut, toujours dans la perspective du paragraphe précédent, interpréter la constante cosmologique, comme un fluide au repos par rapport aux coordonnées de Robertson et Walker et écrire que $-P_\Lambda = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$. On remarque que pour Λ positif, la densité d'énergie est positive alors que la pression est négative. Pour un fluide uniforme, cette pression négative engendre une expansion accélérée de l'univers. Dans la suite, on inclut la constante cosmologique dans le tenseur énergie-impulsion. Ainsi, $\rho = \rho_\Lambda + \rho_{mat,rad}$. Dans l'Univers primordial et cela jusqu'à une époque récente à l'échelle de l'Univers, la constante cosmologique joue un rôle insignifiant. En effet, après l'ère de Planck, la densité d'énergie du vide

²La convention adoptée est celle de Landau : pour la métrique plate de Minkowski : +1,-1,-1,-1

est 10^{125} fois plus petite que la densité de radiation. D'après les mesures sur les supernovae, la densité d'énergie du vide n'a dominé les autres fluides (radiation et matière) que récemment ($z = 1$) : aujourd'hui, on l'estime à 4 KeV/cm^3 . A ce stade de notre exposé, nous ne prenons pas encore en compte la notion d'inflation qui produit une valeur élevée pour l'énergie du vide dans l'Univers primordial.

En combinant les équations d'Einstein avec la métrique de Robertson et Walker, on obtient les équations de Friedmann. Pour être plus précis, nous dirons que d'abord, on tire de la métrique l'expression des connexions affines puis celle du tenseur de Ricci et de sa trace. On place ces expressions dans les équations d'Einstein dans lesquelles on a, bien évidemment, placé le tenseur d'énergie impulsion décrit précédemment dans l'équation (2.3). On obtient :

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho \quad (2.4)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -\frac{8\pi G}{3c^2} P \quad (2.5)$$

Par conservation du tenseur énergie-impulsion (2.3), on obtient aussi cette équation :

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(P + \rho) = 0 \quad (2.6)$$

La deuxième de ces trois équations est appelée équation de Friedmann. Elle correspond à la composante 00 des équations d'Einstein. Si l'on résout la troisième des équations en posant $P = \omega\rho$ avec ω constant car l'Univers primordial est suffisamment homogène pour cela, on trouve que : $\rho \propto a^{-3(\omega+1)}$. Or, pour la matière $\omega \approx 0$, donc on obtient $\rho \propto a^{-3}$. Pour la radiation $\omega = \frac{1}{3}$, on obtient $\rho \propto a^{-4}$. On comprend pourquoi dans l'Univers primordial où $a \ll 1$, l'Univers est dominé par la radiation. Si l'on se place dans un Univers plat (c'est-à-dire $k = 0$), ce que confirme les observations, l'équation de Friedmann devient :

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho \quad (2.7)$$

Si l'on résout l'équation de Friedmann avec $\rho \propto a^{-3(\omega+1)}$, on trouve que $a \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$. On obtient donc $a \propto t^{\frac{1}{2}}$ pour un Univers dominé par la radiation et $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ pour un Univers dominé par la matière.

2.1.4 La singularité initiale

Les trois équations précédentes sont reliées par les identités de Bianchi et seulement deux sont indépendantes. En faisant la différence entre les deux premières équations, on obtient une équation pour l'accélération :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3P) \quad (2.8)$$

Si dans le passé, $\rho + 3P$ était toujours positif, l'équation implique que \ddot{a} était toujours négatif donc à un temps fini dans le passé, "a" doit avoir été nul. On appelle cet "instant" le Big-Bang : on l'identifie généralement au temps 0. Lorsque $a = 0$, il y a une singularité. Extrapoler au-delà de la singularité est impossible dans le cadre de la relativité générale classique. Obtenir une singularité est le signe que la théorie qui l'obtient n'est plus valable.

2.1.5 Les Géométries de l'Univers

Le taux d'expansion de l'Univers est donné par le paramètre de Hubble : $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Ce paramètre n'est pas constant. Ce que l'on appelle la constante d'Hubble est la valeur présente de H que l'on nomme H_0 . L'équation de Friedmann peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{\rho}{\frac{3H^2 c^2}{8\pi G}} - 1 \equiv \Omega - 1 \quad (2.9)$$

Où Ω est le rapport de la densité à la densité critique ρ_c c'est-à-dire $\Omega = \rho/\rho_c$. On définit la densité critique comme étant la densité où $k = 0$ c'est-à-dire $\rho_c = 3c^2 H^2 / 8\pi G$. L'équation (2.9) montre un rapport entre la géométrie de l'Univers et le signe de $\Omega - 1$:

- $k = 1 \Rightarrow \Omega > 1$: on dit que l'Univers est fermé. Il croît, atteint un maximum, puis se contracte.
- $k = 0 \Rightarrow \Omega = 1$: on dit que l'Univers est plat. L'espace-temps est sur de très grandes échelles de distance, un espace-temps euclidien. L'Univers s'étend indéfiniment.
- $k = -1 \Rightarrow \Omega < 1$: on dit que l'Univers est ouvert. L'Univers s'étend indéfiniment mais de manière plus rapide que dans le cas $k = 0$.

2.2 L'Univers aujourd'hui : observations et conséquences

La compréhension actuelle de l'évolution de l'Univers est fondée sur le modèle cosmologique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) que l'on nomme couramment modèle du Hot Big Bang. Ce modèle est devenu le modèle cosmologique standard. En effet, des preuves directes appuient ce modèle jusqu'au début de la nucléosynthèse primordiale soit un centième de seconde après le Big-Bang.

2.2.1 Le fonds diffus cosmologique : Cosmic Microwave Background Radiation

Le haut degré de symétrie du modèle FRW est une hypothèse fondamentale du modèle. L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie mérite vérifications. Une des preuves les plus spectaculaires de cette propriété d'homogénéité est l'uniformité, quelque soit la direction

de l'espace vers laquelle on observe, de la température du CMBR qui correspond parfaitement au spectre d'émission d'un corps noir. En 2006, WMAP [1] a donné les dernières mesures : $T_0 = 2.725 \pm 0.001$ K. La mesure des anisotropies donne : $\Delta T/T \leq 10^{-5}$. Nous rappelons que le CMBR est formé des photons qui se sont découplés de la matière dans la 'soupe primordiale'. En effet, dans l'Univers primordial, la matière et la radiation étaient en constante interaction donc à l'équilibre thermique (à cause des rapides interactions entre photons et électrons). Lorsque la densité d'électrons libres est devenue trop faible pour maintenir l'équilibre thermique, à cause de la formation des atomes, les photons se sont découplés de la matière. En d'autres termes, le découplage s'est produit lorsque le libre parcours moyen des photons est devenu plus grand que la distance de Hubble cH^{-1} qui caractérise l'expansion de L'Univers. Ce sont ces photons qui se sont échappés de la soupe primordiale, ou de l'Ylem selon Gamow, que l'on observe aujourd'hui et que l'on nomme CMBR. Si l'expansion de l'Univers était grandement anisotrope, nous observerions aujourd'hui des fluctuations de grande ampleur au niveau des températures mesurées. La remarquable uniformité du CMBR indique qu'à l'époque du découplage (soit $z \simeq 1100$ soit à peu près 300000 ans après le Big-Bang), l'Univers était hautement isotrope et homogène. Le CMBR fournit une preuve manifeste que l'Univers débuta par le Hot Big Bang. Les inhomogénéités observées inférieures à 10^{-5} sont nécessaires pour expliquer la formation des structures. Nous pouvons, d'ors et déjà, faire une remarque en relation avec les paragraphes suivants : un Univers avec de la matière purement baryonique impliquerait $\Delta T/T \geq 10^{-5}$. Nous constatons, grâce aux mesures sur le CMBR, qu'il y a une nécessité de matière sombre non baryonique.

2.2.2 Les abondances des éléments légers, le nombre de baryons, et le problème du Lithium

La théorie de la nucléosynthèse primordiale est un des tests majeurs du modèle standard cosmologique. Les origines primordiales des éléments légers sont prévus par le modèle. Le modèle prédit que les réactions nucléaires qui ont eu lieu entre 0.01 seconde et 100 secondes après le Big-Bang ont produit les éléments légers comme le Deutérium, l'Hélium 3, l'Hélium 4 et le Lithium 7. La comparaison entre les abondances prédites par le modèle et celles observées actuellement fournit une vérification supplémentaire de la cosmologie standard.

Or, les résultats des observations concordent remarquablement, pour la plupart des éléments cités, avec ce que prévoit le modèle. On trouve que le ratio baryons sur photons est compris entre $4 \cdot 10^{-10}$ et $7 \cdot 10^{-10}$ ce qui correspond à $0.015 \leq \Omega_B h^2 \leq 0.026$ où h est un facteur multiplicatif de H_0 pris égal à 100 Km/s/Mpc due à l'indétermination sur cette valeur et où Ω_B est la densité de baryons sur la densité critique.

Les résultats de WMAP3 [1] donnent $\Omega_B h^2 = 0.0223^{+0.0007}_{-0.0009}$ et l'article [2] qui utilise les contraintes sur les supernovae, les amas de galaxies et la forêt de raie Lyman- α en plus du

CMB donne $h = 0.703_{-0.013}^{+0.013}$ et $\Omega_B h^2 = 0.0224_{-0.0006}^{+0.0007}$.

Nous citons cet article car, pour déterminer la valeur de h , le CMB seul n'est pas très contraignant. Dans la suite, nous avons toujours utilisé les données de ce papier. Le calcul théorique de la BBN (Big Bang Nucleosynthesis) fournit donc la plus précise détermination du nombre de baryons. On trouve $\Omega_B \approx 0.045$. Si la fraction de baryons par rapport à la densité était d'ordre 1, le Deutérium serait beaucoup moins abondant et l'Hélium IV et le Lithium VII serait beaucoup trop abondants par rapport aux mesures. Donc si Ω_0 , la densité actuelle sur la densité critique, est proche de 1, ce vers quoi concordent les observations sur les supernovae, on peut en déduire que l'essentiel de l'énergie-matière de l'Univers se présente sous une autre forme que les baryons.

La théorie de la nucléosynthèse primordiale présente cependant des problèmes [20], [21] à expliquer les abondances de Lithium 7 et de Lithium 6. La théorie de la nucléosynthèse donne une quantité deux à trois fois plus grande pour le Lithium 7 que les quantités évaluées à partir des mesures sur les étoiles de faible métallicité. Quant au lithium 6, Les mécanismes astrophysiques de création de cet élément semblent ne pas pouvoir expliquer son abondance qui pourrait avoir donc une origine primordiale. Le problème est que la théorie de la nucléosynthèse primordiale n'en produit pas suffisamment pour expliquer les observations.

2.2.3 L'expansion et l'accélération de l'Univers

L'expansion de l'Univers est une des caractéristiques majeures de la cosmologie standard. L'expansion fut découverte au cours des années 1920. Cette expansion a été mise en évidence par la mesure d'un décalage vers le rouge des objets observés. Ainsi, avant 1993, des mesures de décalage vers le rouge sur 30000 galaxies ont été faites. On rappelle que l'expansion est prise en compte dans l'expression de la métrique de FRW par le biais du facteur $a(t)$. La valeur $H_0 = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$ est le taux d'expansion actuelle. Il serait de 70 Km/s/Mpc.

L'observation de chandelles standards, c'est-à-dire d'objets rayonnants toujours la même quantité d'énergie, et dont la magnitude absolue, la durée d'émission et le spectre sont indépendants de l'espace et du temps, a permis de déterminer la magnitude apparente m , le redshift z de ces sources et la magnitude absolue M . Or, il existe une relation entre la magnitude apparente, la magnitude absolue, le redshift et les paramètres cosmologiques. On peut donc obtenir les paramètres cosmologiques c'est-à-dire Ω_M , la densité d'énergie-matière sur la densité critique, Ω_Λ , la densité d'énergie du vide sur la densité critique, et Ω_k la densité d'énergie liée à une courbure k non nulle sur la densité critique.

Les objets choisis comme chandelles standards sont les supernovae de type Ia. Ce sont à l'origine des naines blanches qui accrètent du gaz dans l'enveloppe stellaire d'un compagnon. Lorsque la masse de la naine blanche atteint le seuil de la masse de Chandrasekhar, l'équilibre hydrostatique de l'étoile devient instable et son cœur s'effondre : la densité et

la température augmente jusqu'à ce que le carbone et l'oxygène entrent en fusion thermonucléaire, la pression n'est plus contrebalancée par la gravité et l'étoile explose. Puisque la masse qui fusionne est toujours donnée par la masse de Chandrasekhar ($1.4 M_{\odot}$), les supernovae de type Ia sont donc de bonnes chandelles standards. Lors de l'explosion, la luminosité atteint un pic de $10^{10} L_{\odot}$: la supernova devient aussi brillante que la galaxie hôte et est visible à des distances cosmologiques.

Le Supernova Cosmology Project [22] a ainsi mesuré que le meilleur jeu de paramètres cosmologiques était une courbure k nulle donc un Univers plat c'est-à-dire $\Omega = 1$ avec Ω_M de l'ordre de 0.28 et Ω_{Λ} de l'ordre de 0.72. L'Univers accélère car la condition $\Omega_{\Lambda} > \Omega_M/2$ est remplie. Les observations de WMAP confirment le modèle d'un Univers plat contenant environ 30% de matière et 70% d'une énergie noire qui se comporte comme une constante cosmologique ou un fluide de quintessence.

2.3 La matière noire

L'existence supposée de la matière noire repose entre autres sur la contradiction entre la masse de différents objets de l'Univers (galaxie ou amas) estimée par des méthodes dynamiques et celle que l'on évalue à partir de leurs constituants visibles. La masse dynamique est systématiquement plus grande que la somme des masses des constituants identifiés. On est ainsi amené à postuler la présence d'une masse invisible de matière. La masse de cette matière sombre est 10 à 100 fois plus importante que celle de la matière lumineuse.

En 1933, Zwicky en étudiant la distribution de vitesse des galaxies dans le grand amas de Coma, concluait que les galaxies ne contribuaient qu'à 10% de la masse de l'amas. La question est restée un peu oubliée pendant un demi-siècle puis est revenue à la surface devant l'accumulation de données qui suggéraient qu'une fraction importante de la masse de l'Univers n'était pas lumineuse. On trouve cette matière sombre à l'échelle des galaxies où son extension supérieure à celle de la matière lumineuse se traduit par des vitesses de rotation anormalement élevées ; mais aussi à l'échelle des amas de galaxies, où sa présence accélère les galaxies et déforme en arcs les galaxies d'arrière-plan.

2.3.1 Théorie et nature de la matière noire

La présence de matière noire non baryonique semble requise à l'échelle cosmologique. En effet, cette matière noire semble nécessaire pour expliquer la théorie selon laquelle les grandes structures, galaxies et amas, se forment à partir de petites fluctuations primordiales de densité qui croissent ensuite par instabilité gravitationnelle. La difficulté d'un scénario purement baryonique est une question de temps : la croissance des fluctuations est freinée par l'expansion de l'Univers : les fluctuations des baryons ne commencent à croître qu'après la recombinaison des ions et électrons, quand les photons se découplent. C'est déjà trop tard pour expliquer la formation des structures. Si par contre, l'essentiel

de la matière dans l'Univers n'interagit pas ou faiblement avec les photons, ses propres fluctuations débutent leur croissance dès qu'elle contrôle l'expansion (i.e quand l'Univers est dominé par la matière), c'est-à-dire bien avant le découplage. Les fluctuations de cette matière qui interagit faiblement avec les photons ont le temps de croître et forment de profonds puits de potentiel dans lesquels les baryons se précipitent dès que le couplage des baryons au rayonnement disparaît. Une fluctuation de densité ne croît que si elle contient une masse supérieure à une masse critique appelée masse de Jeans. Deux théories principales ont été développées : la matière noire chaude (Hot Dark Matter) et la froide (Cold Dark Matter). La matière noire chaude se découple de la matière ordinaire alors qu'elle est ultra-relativiste. C'est ce que l'on appelle le scénario top-down : les particules considérées étant ultra-légères, leur masse de jeans est élevée. On commence donc par créer des grandes structures (super amas) qui se fragmentent en plus petites. Son inconvénient est que les structures que ce scénario permet de former sont formées trop tard. L'avantage est le grand nombre de structures formées. Dans le scénario de matière noire froide, les particules de matière noire se découplent du reste de l'Univers sans être relativistes. Ce sont des particules massives (au-delà de la dizaine de GeV) : leur masse de Jeans est beaucoup plus faible que pour les particules ultra-relativistes. On commence donc par former des structures nettement plus petites que des galaxies. C'est le scénario Down-Top. Le modèle le plus en vogue aujourd'hui est le modèle d'un Univers en expansion accélérée avec de la matière noire froide (modèle Λ CDM). Pourtant, un modèle de matière noire froide semble ne pas expliquer certaines structures : il existe en effet des structures 'petites' (galaxies) plus jeunes que des structures plus étendues (amas). Nous émettons l'hypothèse peut-être vérifiable dans le modèle que nous développerons, d'un modèle mélangeant de la matière noire froide et de la matière noire tiède (Warm Dark Matter) qui pourrait peut-être résoudre les lacunes de chacun des modèles.

Bien que la nucléosynthèse primordiale laisse penser qu'une petite fraction de la matière noire soit baryonique, l'essentiel de la matière noire doit être non baryonique. De façon générale, un halo de matière sombre baryonique pose le problème de sa formation : pourquoi une partie de la galaxie se serait-elle condensée en un disque de gaz et d'étoiles et le reste en un halo formé d'objets compacts ? Un halo de matière noire non baryonique évite ce problème en attribuant les baryons au disque et la matière sombre non-baryonique au halo sphérique. La plupart des candidats pour rendre compte de la matière noire s'expliquent par une relation due à Zeldovitch, Lee et Weinberg, entre masse, couplage et abondance actuelle d'une particule élémentaire. Si une particule se découple sans être relativiste, sa densité sur la densité de photons décroît exponentiellement : en effet, elle peut s'annihiler avec son anti-particule. Mais comme l'Univers est en expansion, la densité de cette particule devient si faible qu'elle n'a plus le temps de trouver son antiparticule : le rapport de sa densité sur celle des photons se stabilise, on dit qu'elle gèle. En première approximation, en égalant le taux d'annihilation avec le taux d'expansion, on trouve la densité de gel. Pour des particules massives de masse comprise entre 1 GeV et 100 GeV et de section efficace donnée par des interactions électrofaibles, on trouve une densité proche de la densité critique. Ce résultat suggère que la matière sombre non baryonique pourrait être composée

de particules massives (au-delà du GeV) interagissant faiblement d'où le nom générique de WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles). Le Neutralino le plus léger prédit par le MSSM est un candidat pour décrire cette matière noire non baryonique.

2.4 La Quintessence

2.4.1 Quintessence Vs constante cosmologique

La constante cosmologique, comme nous l'avons vu, permet d'obtenir naturellement un fluide à pression négative. Ce fluide (qui serait l'expression de l'énergie du vide) serait responsable de l'accélération actuelle de l'Univers puisque sa densité d'énergie dominerait celui de la matière à notre époque. Pourtant, une pure constante cosmologique présente deux problèmes [23]. Le premier est connu sous le nom de fine-tuning : pourquoi un tel écart entre l'énergie du vide et l'énergie de Planck : $\rho_{\Lambda}^0 / \rho_{Planck} \sim 10^{-123}$?

D'autre part, l'Univers est aujourd'hui en phase d'accélération : la densité d'énergie du vide n'est devenu prépondérante que maintenant. L'autre problème est donc celui des conditions initiales. En effet, une constante cosmologique doit être infiniment ajustée au 'départ' pour ne devenir prépondérante que maintenant. A l'époque de Planck alors que l'Univers est dominé par la radiation, la contribution de la constante cosmologique à l'énergie totale était infiniment faible : $\rho_{\Lambda}^i / \rho_{rad}^i \sim 10^{-125}$ (i signifiant initial). Le problème est donc que toute autre valeur qui ne serait pas celle si précisément fixée pour la constante cosmologique conduirait à une évolution différente de l'Univers tel que nous le connaissons. L'avantage du modèle de la quintessence est, comme nous allons l'expliquer, de régler le problème des conditions initiales. En effet, ce modèle permet d'avoir une plage très large pour les conditions initiales de l'énergie du vide. On ne règle cependant pas le problème du fine tuning entre l'échelle de Planck et celui de la valeur de l'énergie du vide.

Avant d'introduire la modélisation de la quintessence, nous allons citer les différentes époques se succédant. Durant les premières fractions de seconde après le Big-Bang, c'est-à-dire jusqu'à 10^{-43} seconde, prend place ce que l'on appelle l'ère de Planck. C'est l'époque de la gravité quantique dont on ne peut rien dire dans l'état actuel des connaissances. Après cette période, l'Univers est dominé par la radiation jusqu'à ce qu'arrive la phase inflationnaire qui peut avoir eu lieu entre 10^{-30} et 10^{-26} seconde : il n'y a pas vraiment de prérequis pour la position dans le temps de la phase inflationnaire si ce n'est qu'elle ait lieu avant la nucléosynthèse primordiale. Il y a un autre prérequis, plus théorique, venant de scénarios de baryogénèse via leptogénèse qui nécessitent une haute température de réchauffage (reheating) et donc une inflation qui a lieu dans la gamme de temps donnée ci-dessus. L'inflation peut aussi très bien avoir eu lieu avant. L'Univers est ensuite dominée par la radiation jusqu'à 580000 ans après le Big-Bang puis vient l'ère de domination de la matière. 300000 ans après le Big-Bang a lieu le découplage des photons avec la matière. A une époque récente à l'échelle de l'Univers, $z = 1$ soit après 3 milliards et 300 millions

d'années, la densité d'énergie du vide ou l'énergie noire ou la quintessence domine l'Univers.

Dans les périodes étudiées, la matière et le rayonnement suivent l'équation d'état : $P = \omega\rho$. Pour la radiation, $\omega = 1/3$. Pour la matière, $\omega \approx 0$. Pour la constante cosmologique ou la quintessence, $P_Q = \omega_Q\rho_Q$ et ω_Q est négatif. Nous rappelons la différence entre constante cosmologique et quintessence : la constante cosmologique comme son nom l'indique est constante alors que la quintessence est une grandeur dynamique. Le fluide décrit a une pression négative. Si $\omega_Q = -1$ à toutes les époques, on est en présence d'une pure constante cosmologique. Si ω_Q varie au cours du temps en prenant aujourd'hui une valeur négative, on l'appelle quintessence. Le nom 'quintessence' signifie cinquième élément (les quatre autres éléments étant la matière noire, les baryons, les photons et les neutrinos). On modélise la quintessence par un champ scalaire ϕ neutre. Ce champ est associé au Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \quad (2.10)$$

Les équations d'Euler-Lagrange permettent de trouver les équations du mouvement. Ainsi, si l'on se place dans la métrique de Robertson-Walker, on trouve, en prenant un champ ϕ homogène (puisque dans le modèle cosmologique FRW, l'homogénéité est essentielle), ne dépendant que du temps :

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.11)$$

avec $H = \dot{a}/a$. D'autre part, avec l'expression générale du tenseur énergie-impulsion :

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}L \quad (2.12)$$

on trouve dans le cas de la métrique de Robertson-Walker :

$$\rho_\phi = T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.13)$$

pour la composante temporelle, et pour les composantes spatiales :

$$T_{ij} = -P_\phi g_{ij} \quad (2.14)$$

ce qui donne :

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.15)$$

On obtient donc pour l'équation d'état :

$$\omega_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} \quad (2.16)$$

On remarque que ω_ϕ est compris entre -1 et 1 : lorsque le potentiel l'emporte, ω_ϕ est négatif et le champ joue alors le rôle de la constante cosmologique.

2.4.2 Les potentiels attracteurs

Le champ de quintessence est capable d'évoluer dynamiquement. Comme nous allons le voir, cela permet de fixer plus librement les conditions initiales de la densité d'énergie du vide. Les contraintes imposées à la quintessence est de ne devenir prépondérante que maintenant et d'être sous-dominante auparavant pour ne pas perturber l'évolution de l'Univers et la formation des structures. [24] ont développé l'idée des potentiels attracteurs qui permettent de régler le problème des conditions initiales. Nous cherchons une évolution de ϕ qui tende vers une solution attracteur : quelque soit les conditions initiales, le champ relaxe vers cette solution. La traduction des contraintes imposées à la solution attracteur conduit à des conditions sur le potentiel :

$$\Gamma = V''V/V'^2 > 1 \quad (2.17)$$

et le long de la solution attracteur :

$$\omega_\phi = \frac{\omega_B - 2(\Gamma - 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)} \quad (2.18)$$

On vérifie que des potentiels de la forme $V \propto \phi^n$ avec $n < 0$ vérifient la condition mais aussi des potentiels de la forme $e^{(M/\phi)}$. Ce dernier potentiel présente l'avantage de ne faire sortir du fond l'énergie de quintessence que récemment. Steinhardt et al.[24] partent du maximum d'énergie allouable à la quintessence après l'inflation c'est-à-dire une équipartition entre les différents degrés de liberté ce qui donne comme densité d'énergie pour la quintessence, un millième de la densité d'énergie totale. On peut cependant partir avec une énergie cent fois moindre et aboutir à la même convergence vers la solution attracteur. La densité d'énergie de quintessence rejoint le potentiel attracteur au bon moment c'est-à-dire avant l'équipartition matière-rayonnement ce qui permet à l'énergie de quintessence d'émerger du fond au bon moment c'est-à-dire récemment (à un redshift z de l'ordre 1).

2.4.3 Petite digression sur l'énergie du vide

L'énergie du vide ou énergie noire peut paraître plus mystérieuse que la matière noire. Pourtant, au niveau conceptuel, il ne s'agit pas d'autre chose que de l'énergie du vide. Le 'Tout' est de pouvoir la déterminer théoriquement. Prenons l'exemple de l'effet Casimir : cette force n'est pas autre chose que l'énergie du vide de la théorie quantique de l'électrodynamique. Le vide de toutes les théories physiques construites à ce jour ne peut pas rendre compte de l'énergie du vide : ainsi le vide de la QCD est totalement impropre à décrire le vide représenté par la constante cosmologique. La supersymétrie donne une énergie du vide nulle. Or, l'énergie du vide est faible mais n'est pas nulle. Les théories de supercordes qui vivent dans des espaces à 10 dimensions font correspondre cette énergie du vide à 4 d à la conformation géométrique des dimensions compactes or il existe un nombre gigantesque (10^{500}) de possibilités de compactification qui obtiennent la bonne énergie du vide. C'est ce qui est appelé le Landscape. C'est en quelque sorte une des lacunes des théories de cordes.

Aujourd'hui, aucune théorie physique n'est capable de prédire l'énergie du vide. Le vide cosmologique n'est ni le vide électrofaible, ni le vide de l'interaction forte, ni le vide de la supergravité et il n'est pas prévisible en théorie des cordes.. Il manque quelque chose encore dans notre appréhension du monde..

2.5 L'inflation

Selon la théorie de l'inflation, l'Univers dans ses premiers instants, a connu une phase d'expansion extraordinaire. Cette théorie fut développée pour plusieurs raisons. La première des raisons est la platitude actuelle de l'Univers. Si l'on devait expliquer un univers plat dans le modèle FRW, les conditions initiales devraient être infiniment ajustées. Ainsi à l'époque de Planck, $|\Omega - 1| \leq \mathcal{O}(10^{-60})$. L'inflation qui entraîne une croissance exponentielle du paramètre "a" pourrait expliquer que $\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega - 1$ soit proche de 0 et cela sans avoir des conditions initiales aussi infiniment ajustées.

Un autre problème résolu par l'inflation est ce que l'on peut appeler le problème de l'horizon. Le CMBR qui nous parvient est constitué des photons émis lors du découplage de la matière avec le rayonnement. La distance propre traversée par des photons émis depuis la surface de dernière diffusion jusqu'à nous est donnée par $l = a(t_0) \int_{t_s}^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt$ où t_s est l'instant de découplage et t_0 notre époque. Comme au moment du découplage, l'Univers est dominé par la matière, on a $a \propto t^{2/3}$ d'où $l = 3ct_0(1 - (t_s/t_0)^{1/3})$. De plus, on sait que $a(t_0)/a(t_s) = (t_0/t_s)^{2/3} = T_s/T_0 = 3000/2.7$. On obtient donc $l \approx 2.909ct_0$.

L'horizon au moment du découplage est : $R_h(t_s) = 3 c t_s$ car la dimension de l'horizon à t_s est donnée par l'expression : $R_h(t_s) = a(t_s) \int_0^{t_s} \frac{c}{a(t)} dt$. On remarque que ce que l'on appelle horizon est simplement la distance propre maximale à laquelle l'énergie peut se propager en tenant compte de l'expansion de l'Univers d'où la similitude entre la formule donnant la distance propre parcourue par un photon et la taille de l'horizon. En effet, aucune information ne peut se propager plus vite que la lumière.

L'horizon à l'instant t_s est observée aujourd'hui : il faut donc tenir compte de l'expansion de l'Univers. Ainsi, l'horizon à t_s vu de t_0 est $R_h = R_h(t_s) \frac{a(t_0)}{a(t_s)} = 3ct_s(t_0/t_s)^{2/3}$.

On obtient l'angle causal d'observation par ce rapport : $\theta = R_h/l = 0.03$ Rad. C'est précisément ce résultat qui est difficilement compréhensible sans inflation : notre ciel se décomposerait en $4\pi/0.03^2 \approx 14000$ régions qui n'auraient pas eu de contact causal par le passé mais qui envoient le même rayonnement à 2.7 K.

Pour résoudre ce problème, il faut introduire l'inflation. Il faut qu'à un moment donné l'espace se soit dilaté de manière supra-lumineuse ($a(t) \propto \exp(H_v t)$ où $H_v^2 = 8\pi G V_0 / 3c^2$ est le paramètre de Hubble pendant l'inflation et V_0 est la densité d'énergie du champ inflationnaire qui domine l'Univers au début de l'inflation) pour disconnecter des régions

qui étaient en contact causal. Si l'on définit $N = H\tau$ où τ est la durée de l'inflation, il suffit que $N \geq 55$ pour régler ce problème.

On observe des régions qui semblent ne pas avoir eu de contact causal et qui émettent le même rayonnement : en fait, avant la phase inflationnaire, ces régions étaient en contact causal et l'ont perdu après l'inflation pour le retrouver avant notre époque ou à notre époque. Certaines régions sont encore disconnectées causalement et ne seront connectées que plus tard. On dit que les objets sortent de l'horizon puis réentrent dans l'horizon car la vitesse d'expansion est plus faible que la vitesse de la lumière : ce phénomène est connu sous le nom de 'good bye and hello again'.

Un autre problème du modèle cosmologique sans inflation est plus d'ordre théorique puisqu'il concerne la dilution de reliques non observées produites dans les théories grand unifiées. Ainsi dans certaines théories GUT (grand unified theory), des monopoles sont produits. Or nous n'en observons pas actuellement. L'inflation dilue la densité de monopoles de manière très importante : pour $N \geq 55$, la densité de monopoles est diluée de 70 ordres de grandeurs. D'autres particules indésirables sont diluées comme les gravitinos prédits par les théories supersymétriques.

Enfin, l'inflation permet d'expliquer les fluctuations de densité du CMBR qui sont selon le modèle standard à l'origine de la formation des structures. Une des hypothèses fortes pour avoir un champs inflationnaire est le 'slow-roll' que nous allons définir et qui est au coeur de l'explication de la formation des structures.

Revenons tout d'abord sur la modélisation. On modélise généralement l'inflation par un champs scalaire Φ . La densité d'énergie de ce champ ou 'vacuum energy' est $\rho_v = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)$ et la pression est $P_v = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)$. On choisit un potentiel assez plat pour que l'essentiel de l'énergie du champs soit sous forme potentielle. Ceci est fait dans le but d'obtenir une pression négative nécessaire à l'expansion accélérée que l'on souhaite. On obtient donc avec un potentiel plat : $P_v \approx -V_0 = -\rho_v$. Cette phase est appelée le slow-roll. L'équation de Friedmann est :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho_r + \rho_v) \quad (2.19)$$

La radiation est toujours régie par la conservation du tenseur énergie-impulsion :

$$\frac{d\rho_r}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_r + P_r) = 0 \quad (2.20)$$

que l'on peut écrire en remplaçant P_r par $\frac{1}{3}\rho_r$:

$$\frac{d\rho_r}{dt} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0 \quad (2.21)$$

La solution de cette équation est $\rho_r = \beta/a^4$.

La conservation du tenseur énergie-impulsion liée au champ inflationnaire nous donne l'équation de Klein-Gordon (on peut aussi l'obtenir par les équations d'Euler-Lagrange sur le Lagrangien du champ ou encore de manière plus générale, en minimisant l'action) :

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{dV}{d\Phi} = 0 \quad (2.22)$$

Lors du slow-roll, le terme $\ddot{\Phi}$ est négligeable devant les autres termes. Nous reviendrons sur cette équation lorsque nous discuterons des fluctuations de densité.

On obtient en remplaçant ρ_r par sa valeur et ρ_v par V_0 dans l'équation de Friedmann (2.19) :

$$2\sqrt{A}a^2 + 2\sqrt{B + Aa^4} = 2\sqrt{B}e^{2\sqrt{A}t} \quad (2.23)$$

avec $A = \frac{8\pi G}{3c^2}V_0$ et $B = \frac{8\pi G}{3c^2}\beta$.

Pour t petit devant $1/(2\sqrt{A})$, on obtient $a^2 \approx 2\sqrt{B}t$ et de manière équivalente $\rho_r = \frac{3c^2}{32\pi Gt^2}$. La radiation domine encore le champ inflationnaire.

Lorsque $t = 1/(2\sqrt{A}) = t_i$ avec t_i le temps de début de l'inflation, la densité d'énergie potentielle du champ V_0 est à peu près égale à la densité d'énergie de la radiation. On trouve $t_i^2 = \frac{3c^2}{32\pi GV_0}$ en utilisant soit $t_i = 1/(2\sqrt{A})$ soit en égalant ρ_r avec V_0 .

Quand $t > 1/(2\sqrt{A})$, le terme en exponentielle dans l'équation (2.23) devient prédominant et on obtient :

$$a(t) \approx \left(\frac{\beta}{4V_0}\right)^{1/4} e^{H_v t} \quad (2.24)$$

où $H_v^2 = A = \frac{8\pi G}{3c^2}V_0$.

L'Univers entre dans une phase de De Sitter. Le paramètre d'expansion grandit de manière formidable. Durant cette phase inflationnaire, le refroidissement est important $T \propto e^{-4H_v t}$. L'ensemble du contenu en matière rayonnement de l'Univers est dilué : tout disparaît. Mais alors d'où vient la matière qui nous entoure ? L'énergie potentielle du champ finit par s'annuler : le champ oscille autour du minimum et par dissipation transforme son énergies en particules (remarquons que dans l'équation (2.22) nous n'avons pas considéré le terme de couplage à la matière qui ne devient effectif que proche du minimum). On appelle cette phase le réchauffage ou 'reheating' car l'Univers qui avait subi un important refroidissement avec une densité en matière-rayonnement proche de 0, se réchauffe : $T_{rh} \propto V_0^{1/4}$. La densité d'énergie V_0 est formidablement grande puisqu'elle égale la densité d'énergie de

radiation à des temps très primitifs de l'histoire de l'Univers.

Il existe une contrainte d'ordre théorique sur la température de reheating venant de scénario de Baryogénèse via Leptogénèse qui nécessitent des neutrinos droits ultra lourds ; ces particules ne peuvent se former que si la température du bain thermique est suffisamment élevée pour les produire. Ainsi, des températures au-delà de 10^8 GeV, voire 10^9 GeV sont nécessaires.

D'autre part, il existe des contraintes [41] venant de la production de gravitinos de masses plus basses que 20 TeV. Les gravitinos n'étant couplés que gravitationnellement, leur durée de vie est longue. S'ils sont trop abondants, ils peuvent perturber la BBN (Big Bang Nucleosynthesis) leur abondance est proportionnelle à la température de reheating. Ceci implique que les températures de reheating ne doivent pas être trop hautes. Il se trouve que pour des gravitinos de moins de 10 TeV, il est difficile d'accommoder Leptogénèse thermique et supersymétrie.

Le développement que nous venons de faire, va nous permettre de comprendre comment l'inflation permet d'expliquer les fluctuations de densité que n'explique pas une cosmologie standard FRW. Comme tout champ, le champ inflationnaire est soumis à des fluctuations quantiques. Dans l'espace de De Sitter de l'inflation des points qui étaient en contact causal avant l'inflation peuvent ne plus l'être juste après. On dit que ces points ont traversé l'horizon des événements. L'espace de De Sitter est similaire à un trou noir inversé : dans cette espace, nous sommes 'à l'intérieur' et le trou noir nous entoure de toute part à l'extérieur puisqu'un objet qui entre dans un trou noir perd tout contact causal avec l'extérieur. Ainsi, exactement comme dans le cas du trou noir, il y a des fluctuations quantiques de type thermique gouvernées par la température de Hawking : $T_H = H/2\pi$. Dans cette expression et dans la suite, les constantes fondamentales h , c et k sont prises égales à 1.

Le champs est sans masse pendant le slow-roll car $V'' \ll H^2$. Pour un champ sans masse, les fluctuations quantiques sont donc données par l'expression :

$$(\delta\Phi)_{quant} = \frac{H}{2\pi} \quad (2.25)$$

Ces fluctuations du champ induisent des fluctuations de densité :

$$\delta\rho = V'\delta\Phi = V'\frac{H}{2\pi} \quad (2.26)$$

Nous allons tenter de donner une explication sommaire de cette effet. Lors de l'inflation, les fluctuations quantiques des modes du champ sortent de la sphère causale et comme la micro-physique ne joue que dans la sphère causale, (car pour qu'il y ait interaction, il faut que l'information arrive), on dit que les modes gèlent. Lorsque les modes franchissent de nouveau l'horizon, ils deviennent des fluctuations de densité. Les fluctuations quantiques

du champ ne doivent pas être trop excessives pour ne pas que le champ soit projeté rapidement au minimum du potentiel et l'empêche de faire son slow-roll qui permet à l'inflation d'avoir lieu. Il faut donc que les fluctuations quantiques soient une petite perturbation à la trajectoire classique du champ. La variation classique de Φ au cours de l'inflation doit être beaucoup plus grande que sa variation quantique. En effet, plus la variation classique est grande (typiquement l'écart entre les deux extrémités du potentiel), plus le potentiel est plat et moins les fluctuations quantiques peuvent projeter le champ sur le minimum. Or, on sait que $\delta\Phi_{class} \approx \frac{-V'}{3H^2}$, donc pour que les fluctuations classiques soient supérieures aux fluctuations quantiques, il faut que :

$$2\pi \gg -\frac{3H^3}{V'} \quad (2.27)$$

Cette condition est automatiquement vérifiée pour produire des fluctuations de densité correctes. En effet, remarquons déjà que lors du slow-roll d'après l'équation (2.22), on a :

$$3H\dot{\Phi} = -V' \quad (2.28)$$

On conclue donc que :

$$-\frac{3H^3}{V'} = \frac{H^2}{\dot{\Phi}} \quad (2.29)$$

Or, $H^2/\dot{\Phi}$ est typiquement de l'ordre de grandeur des fluctuations de densité produites par l'inflation au retour dans l'horizon :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \frac{H^2}{\dot{\Phi}} \quad (2.30)$$

Nous savons que ces fluctuations de densité sont de l'ordre de 10^{-5} ce qui est bien inférieure à 2π .

2.6 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre donné un aperçu de la cosmologie dans sa version standard. Au niveau des données expérimentales, la remontée dans le temps s'arrête au niveau du découplage matière-rayonnement soit 300000 ans après le Big-Bang. Toute l'histoire de l'Univers depuis le Big-Bang (si Big-bang il y a) jusqu'au moment du découplage est donc une extrapolation à partir de mesures astrophysiques actuelles (supernovae, dynamique des galaxies et des amas, métallicité des étoiles) et de nos connaissances et constructions de physique théorique. La BBN semble être une grande réussite prédictive puisque les mesures de métallicité et les théories d'évolution stellaire confirme les quantités prédites par la BBN. Il reste tout de même le problème de l'abondance de Lithium 6 et 7 dont les quantités semblent ne pas être explicables par la BBN standard et les mesures et théories d'évolution stellaire. Il semble cependant que certaines théories physiques au-delà du modèle standard

puissent permettre d'expliquer la synthèse ces éléments lors de la BBN [20] . Malgré ce léger ennui, la nucléosynthèse primordiale passe globalement le test observationnel et confirme un peu plus la théorie du Big-Bang.

Pourtant, extrapoler de la date 300 000 A.BB ³ jusqu'à l'instant 0 est un exercice périlleux. Les prochains observatoires neutrinos pourraient permettre de sonder l'Univers à des âges beaucoup plus jeunes puisque les neutrinos se découplent environ 1 s après le Big-Bang. Les mesures de détection directe d'ondes gravitationnelles pourraient nous donner une carte de l'Univers encore plus jeune : on pourra peut-être un jour observer les gravitons primordiaux émis lors de l'inflation ou lors d'autres processus [26] donnant lieu à une expansion accélérée comme le scénario ekpyrotique⁴.

La construction au-delà de la date 1s A.BB jusqu'à l'instant 0 pourrait faire intervenir certains phénomènes de physique des particules au-delà du modèle standard. Les transitions quark-gluon vers nucléon et brisure de symétrie électrofaible devraient avoir lieu dans cette période. Des particules supersymétriques pourraient être présentes dans le plasma à cette époque. Les théories unifiées de physique des particules et les théories de gravitation quantique se trouveraient tout prêt de l'instant 0. Cette période au-delà de la date 1s A.BB jusqu'à l'instant 0 est la plus mystérieuse : elle donne lieu à de nombreuses connections avec la physique des particules au-delà du modèle standard dont le LHC pourrait nous donner un avant-goût. L'inflation est placée dans cette période. Ce phénomène nécessaire à la cohérence du modèle du Big-Bang nécessite un champ scalaire pour le moment non identifié dans le contexte des théories au-delà du modèle standard.

³After Big Bang!!

⁴collision de deux membranes miroirs

Chapitre 3

Au-delà du Modèle Standard

3.1 Introduction

Nous allons consacrer l'essentiel de ce chapitre à une branche de la physique théorique connue sous le nom de supersymétrie. Ce que l'on désigne par supersymétrie est une symétrie du Lagrangien de la théorie sous des transformations qui rendent un état bosonique fermionique et vice-versa. Schématiquement, si l'on désigne par Q le générateur de supersymétrie, on écrira schématiquement :

$$Q|Boson\rangle = |Fermion\rangle \quad (3.1)$$

$$Q|Fermion\rangle = |Boson\rangle. \quad (3.2)$$

Le point de départ de la création de cette théorie est le désir qu'ont eu les chercheurs d'étendre l'algèbre de Poincaré qui rend compte des symétries d'espace temps en trouvant une algèbre qui regroupe à la fois les transformation d'espace-temps mais aussi les symétries internes. Il y a eu plusieurs essais dans les années 1960 mais en 1967, Coleman et Mandula montrèrent de façon formelle qu'il est impossible de combiner les deux types de symétries. C'est leur fameux *théorème no-go*. En fait, il était sous entendu que c'était impossible en utilisant des générateurs bosoniques (donc de spin entier) habituels. Mais en 1971, Golfand et Likhtman réussirent l'extension du groupe de Poincaré en utilisant des charges fermioniques, donc de spin demi-entier. Cette extension était l'algèbre de la supersymétrie. En 1973, Wess et Zumino proposèrent la première théorie des champs supersymétrique à 4 dimensions de vrai intérêt du point de vue phénoménologique. Puis, ensemble avec Iliopoulos et Ferrara, ils montrèrent que la supersymétrie permettait de supprimer beaucoup de divergences des théories des champs usuelles. En 1976, deux groupes découvrirent que la supersymétrie locale (la transformation de supersymétrie dépend alors des coordonnées d'espace-temps) incluait une description de la gravitation. C'est ce que l'on a appelé la *supergravité*. Nous reviendrons sur ce point.

Depuis, la phénoménologie de la supersymétrie a été énormément étudiée et les théories fondées sur la supersymétrie se sont imposées parmi les candidates les plus sérieuses pour la physique au-delà du Modèle Standard. L'extension minimale du modèle standard (Minimal Supersymmetric Standard Model) est l'extension minimal en contenu de particules

du modèle standard. Ce modèle a été largement étudié.

Enfin, nous aborderons aussi dans ce chapitre, les principes de la Supergravité, des notions sur les modèles avec dimensions supplémentaires ainsi que sur les théories de supercordes.

3.2 Supersymétrie : des effets intéressants

L'introduction des particules supersymétriques a un effet positif sur quelques problèmes que rencontrent le modèle standard de la physique des particules :

- Le problème de la hiérarchie entre l'échelle électrofaible et l'échelle de Planck. Si l'on considère les corrections radiatives à une boucle fermionique à la masse du Higgs, on trouve :

$$\Delta m_H^2 = -\frac{y_f}{16\pi^2}[2\Lambda^2 + 6m_f^2 \ln(\Lambda/m_f) + \dots], \quad (3.3)$$

où λ est le cut-off. Si on le prend égal à 10^{19} GeV, on obtient une correction radiative gigantesque par rapport à l'échelle électrofaible (100 GeV). Le modèle standard est bien sûr renormalisable. Il suffit de prendre un contre-terme suffisamment ajusté pour trouver la masse correcte pour le Higgs. Seulement se pose maintenant le problème du fine-tuning (qui n'est finalement que l'expression du problème de la hiérarchie) : il faut infiniment ajuster le contre-terme pour que lorsqu'il est sommé avec le Δm_H^2 , il donne une valeur proche des $(100 \text{ GeV})^2$.

Le problème est résolu naturellement avec la supersymétrie. Nous allons voir pourquoi. La supersymétrie associe aux fermions des partenaires scalaires avec les mêmes nombres quantiques que leurs partenaires fermioniques mais avec bien évidemment un spin différent. Ces scalaires se couplent aux Higgs et l'on a de la même manière que pour les fermions des boucles de scalaires qui contribue aux corrections radiatives du Higgs :

$$\Delta m_H^2 = \frac{\lambda_S}{16\pi^2}[\Lambda^2 - 2m_S^2 \ln(\Lambda/m_S) + \dots], \quad (3.4)$$

où λ_S est son couplage avec le boson de Higgs. Si nous regardons de plus près les deux équations, nous constatons que les deux contributions divergentes (leur terme $\propto \Lambda^2$) s'annulent si pour chaque fermion de notre théorie entrant dans la boucle nous avons aussi 2 scalaires avec $\lambda_S = y_f^2$. C'est exactement ce que la supersymétrie apporte : les deux scalaires associés au fermion. En effet, un fermion de Dirac a quatre degrés de liberté : on peut lui associer deux scalaires complexes : en effet pour écrire une théorie des champs supersymétrique cohérente, il faut que le nombre de degré de liberté des fermions et de leurs partenaires supersymétriques soient égaux. Les divergences logarithmiques ne se compensent pas complètement mais cela n'induit pas de problèmes d'ajustement fin tant que les masses des scalaires associés aux fermions n'est pas trop élevées, disons jusqu'à 10 TeV comme masse maximum. La supersymétrie 'basse énergie' résout donc naturellement le problème de la hiérarchie.

- Si l'on considère l'évolution des trois couplages en fonction de l'énergie, nous observons qu'ils tendent tous presque à se croiser vers la même échelle. En ajoutant les particules supersymétriques, les couplages se croisent très précisément vers le même point (en ajoutant le spectre du MSSM) vers $2 \cdot 10^{16}$ GeV. Cette unification assez spectaculaire laisse penser à ceux qui croient en une unification des forces que la supersymétrie pourrait bien être un ingrédient nécessaire.

- La supersymétrie apporte une pléiade de candidats potentiels pour décrire la matière noire. En ajoutant une symétrie discrète appelée R-parité qui permet d'éviter à certains termes d'interaction d'être présents (car ils pourraient entraîner une désintégration rapide du proton), la particule supersymétrique la plus légère est stable. En effet, les particules supersymétriques ont -1 pour R-parité alors que les particules du modèle standard ont 1 . Par conservation de ce nombre dans les réactions, une particule supersymétrique qui se désintègre en deux particules doit donc donner une particule standard plus une particule supersymétrique. Il est donc logique que la particule supersymétrique la plus légère soit stable (puisque si c'est la plus légère, elle ne peut pas se désintégrer et donner une particule supersymétrique qui devrait être forcément plus légère). Les candidats sont souvent le neutralino le plus léger, le gravitino, le sneutrino, l'axino..

3.3 Notations

Nous allons dans ce brève interlude donner nos notations et conventions sur ce qui concerne les spineurs.

- *Un spineur de Weyl* décrit une particule de spin $1/2$ et de chiralité donnée. C'est un spineur à 2 composantes. Nous nous efforcerons le plus souvent de les noter par des lettres minuscules grecques avec un indice. Par exemple $\psi_\alpha, \xi_\beta, \dots$ où $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$. Un spineur ψ_α ou ψ_L est par convention de chiralité gauche, le spineur droit est noté $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ ou ψ_R . A noter que :

$$(\psi_\alpha)^* = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \quad (3.5)$$

$$(\bar{\psi}^{\dot{\alpha}})^* = \psi^\alpha \quad (3.6)$$

et que les matrices $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = i\sigma_2$ et $\varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -i\sigma_2$ permettent de monter et descendre les indices spinoriels α et β .

- *Un spineur de Dirac* se construit avec 2 spineurs de Weyl et réunit les deux chiralités d'une particule donnée. C'est donc un spineur à 4 composantes. Nous les noterons par des lettres majuscules grecques : Ψ, χ, Φ, \dots . En termes de ses spineurs de Weyl, nous avons :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Les opérateurs de projection $P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ permettent de sélectionner l'une ou l'autre chiralité : $\Psi_{R,L} = P_{R,L}\Psi$.

- *Un spineur conjugué de charge* est un spineur auquel l'opérateur de conjugaison de charge a été appliqué. Il décrit la même particule mais sa charge électrique est opposée.

$$\Psi^c = C\overline{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \frac{\eta_\alpha}{\psi^{\dot{\alpha}}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

où la matrice de conjugaison de charge C peut s'écrire :

$$C = i\gamma^0\gamma^2 \quad (3.9)$$

- *Un spineur de Majorana* se construit avec un seul spineur de Weyl mais l'englobe dans une notation à 4 composantes. Il est égal à son conjugué de charge, $\Psi_M = \Psi_M^c$.

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ -i\sigma_2(\psi_L)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\psi_\alpha}{\psi^{\dot{\alpha}}} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

- *La représentation des matrices γ* choisie est la représentation de Weyl dans laquelle :

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

avec $\sigma^\mu = (\mathbf{1}_2, \sigma^i)$, $\overline{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_2, -\sigma^i)$ où les σ_i sont les matrices de Pauli, et $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \text{diag}(-\mathbf{1}_2, \mathbf{1}_2)$.

Nous avons aussi $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$ où $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ est la métrique de Minkowski utilisée pour monter et descendre les indices de Lorentz.

3.4 L'algèbre

L'algèbre de Poincaré est étendu avec des générateurs fermioniques. La supersymétrie introduit des nouveaux générateurs Q_α , fermioniques, donc anticommutable entre eux : deux opérations de supersymétrie ne commutent donc pas entre elles. Rien n'interdit l'introduction de plusieurs générateurs, mais dans la version simple de la supersymétrie il n'y a qu'un seul nouveau couple de générateurs, Q_α et $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$. C'est la "supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ " c'est-à-dire avec un seul générateur de supersymétrie.

L'algèbre supersymétrique est faite de l'union de l'algèbre de Poincaré et de des relations de commutations et d'anti-commutations Q_α et $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ entre eux et avec les éléments de l'algèbre.

$$[P^\mu, Q_\alpha] = 0 = [P^\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] \quad (3.12)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P^\mu \quad (3.13)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (3.14)$$

$$\{M_{\mu\nu}, Q_\alpha\} = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad (3.15)$$

$$\{M_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \frac{1}{2}(\overline{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} \quad (3.16)$$

Nous allons maintenant étudier les représentations irréductibles de cet algèbre : les supermultiplets. En effet, nous voulons appliquer la supersymétrie à la physique des particules, il nous faut donc savoir comment ranger nos particules et quelles seront leurs propriétés de transformation. Dans le groupe de Poincaré, il y a 2 éléments invariants de Casimir c'est-à-dire commutant avec les éléments de l'algèbre : l'opérateur de spin $W^2 = W^\mu W_\mu$, avec $W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}$ le vecteur de Pauli-Lubanski, et l'opérateur de masse $P^2 = P^\mu P_\mu$, où P^μ est la quadri-impulsion. Dans un multiplet du groupe de Poincaré, les particules ont la même masse et le même spin puisque l'opérateur de spin et de masse sont des invariants de Casimir. Mais dans l'algèbre supersymétrique, W^2 ne commute plus avec Q_α . Nous avons

$$[P^2, Q_\alpha] = 0 \quad (3.17)$$

$$[W^2, Q_\alpha] \neq 0 \quad (3.18)$$

et donc, dans un supermultiplet les particules ont la même masse mais des spins différents. Nous pouvons tout de même corriger W^2 pour obtenir un nouvel invariant dont les valeurs propres sont sous la forme $2j(j+1)m^4$ avec $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ le nombre quantique de superspin. Ce nouveau W^2 est invariant donc chaque représentation irréductible peut être caractérisée par un couple $[m, j]$ et le lien entre le spin S et j est déduit de la relation : $M_S = M_j, M_j + \frac{1}{2}, M_j - \frac{1}{2}, M_j$. Dans un même supermultiplet, on aura donc des particules de même masse et de même superspin. De plus, une propriété importante est qu'il y a égalité dans un supermultiplet entre le nombre de degrés de liberté bosoniques et fermioniques.

Nous pouvons maintenant construire les différentes représentations :

▷ La représentation fondamentale $[m, 0]$ est appelée *supermultiplet chiral (ou scalaire)*. La valeur $j = 0$ implique $M_S = 0, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ donc ce supermultiplet contient 2 champs scalaires réels réunis sous la forme d'un champ scalaire complexe (le sfermion), ϕ et un champ fermionique de Weyl (de spin $1/2$), ψ . Ces champs ont la même masse. Pour que la supersymétrie soit préservée dans les boucles où les particules ne sont pas sur leur couche de masse il faut que les degrés de liberté fermioniques et bosoniques soient aussi équilibrés dans ce cas dit (off-shell). En effet, off-shell, un fermion de Weyl possède 4 degrés de liberté de spin (un spineur de Weyl a deux composantes complexes) au lieu de 2 on-shell. Il faut donc ajouter au contenu de cette représentation un autre champ scalaire complexe mais qui ne se propage pas donc sans terme cinétique (on dit qu'il est auxiliaire). On peut utiliser l'équation du mouvement $F = F^* = 0$ pour l'éliminer. Le contenu total du supermultiplet chiral est donc

$$\Psi = (\phi, \psi_\alpha, F). \quad (3.19)$$

▷ La seconde représentation que nous allons utiliser dans la suite est le supermultiplet vecteur $[m, 1/2]$. Son contenu en champ est : un fermion de Majorana (le jaugino), λ_α^a , un boson de jauge (de masse nulle), A_μ^a , et comme pour le supermultiplet chiral, un champ scalaire réel auxiliaire, D^a .

$$\Phi = (\lambda_\alpha^a, A_\mu^a, D^a), \quad (3.20)$$

où a est l'indice adjoint du groupe de jauge :

C'est dans ces deux représentations que les particules du MS et leurs superpartenaires seront rangés. Nous allons maintenant construire avec ces deux représentations une théorie des champs supersymétrique.

3.5 Théorie des champs

3.5.1 Le lagrangien libre globalement supersymétrique

L'action la plus simple que l'on peut construire avec le supermultiplet chiral est celle du modèle de Wess-Zumino, sans masse et sans interaction. Dans le cas on-shell (sans champ auxiliaire), nous avons simplement le terme cinétique d'un fermion ψ et d'un boson scalaire ϕ :

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{scalaire}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{L}_{\text{scalaire}} = -\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* \quad (3.22)$$

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = -i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad (3.23)$$

Si on applique une transformation supersymétrique globale de paramètre ϵ_α , fermion de Weyl infinitésimal indépendant des coordonnées d'espace-temps ($\partial^\mu \epsilon_\alpha = 0$), sur le champ scalaire ϕ , le résultat doit être proportionnel au champ fermionique ψ :

$$\delta\phi = \epsilon^\alpha \psi_\alpha \quad \text{et} \quad \delta\phi^* = \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{L}_{\text{scalaire}} = -\epsilon^\alpha (\partial^\mu \psi_\alpha) \partial_\mu \phi^* - \partial^\mu \phi \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} (\partial_\mu \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}) \quad (3.25)$$

A noter que le fermion infinitésimal ϵ_α a la dimension d'une masse à la puissance $-\frac{1}{2}$ contrairement à un fermion de Weyl usuel qui a la dimension (masse) $^{3/2}$:

$$[\phi] = 1, \quad [\psi] = \frac{3}{2}, \quad [\epsilon] = -\frac{1}{2}. \quad (3.26)$$

L'action est invariante sous une transformation de supersymétrie si la somme $\delta\mathcal{L}_{\text{scalaire}} + \delta\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ est nulle à une divergence totale près, qui ne contribuera pas à l'action. Par analyse dimensionnelle et en respectant l'invariance par supersymétrie on trouve :

$$\delta\psi_\alpha = i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi \quad \text{et} \quad \delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -i(\epsilon \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* \quad (3.27)$$

Dans le cas off-shell, l'action S est modifiée par l'ajout d'un terme comportant le champ F :

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{scalaire}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{aux}}, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{L}_{\text{aux}} = F^* F, \quad (3.29)$$

et les transformations de supersymétrie des champs ψ et ϕ s'en trouvent modifiées. Pour le champ scalaire F , sa transformation doit faire intervenir le champ ψ car F est un scalaire. Remarquons que la dimension du champ F est une masse au carré. Avec les lois de transformation suivantes,

$$\delta F = i \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^{\mu})_{\dot{\alpha}}^{\beta} \partial_{\mu} \psi_{\beta} \quad \text{et} \quad \delta F^* = -i \partial_{\mu} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^{\mu})_{\dot{\beta}}^{\alpha} \epsilon_{\alpha}, \quad (3.30)$$

la variation du terme \mathcal{L}_{aux} donne :

$$\delta \mathcal{L}_{aux} = i \bar{\epsilon} (\bar{\sigma}^{\mu}) \partial_{\mu} \psi F^* - i \partial_{\mu} \bar{\psi} (\bar{\sigma}^{\mu}) \epsilon F. \quad (3.31)$$

Cette variation s'annule bien on-shell avec l'équation du mouvement $F = F^* = 0$. Pour compenser cette variation dans le cas off-shell, la loi de transformation de ψ devient :

$$\delta \psi_{\alpha} = i (\sigma^{\mu} \bar{\epsilon})_{\alpha} \partial_{\mu} \phi + \epsilon_{\alpha} F \quad \text{et} \quad \delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -i (\epsilon \sigma^{\mu})^{\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \phi^* + \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} F^*. \quad (3.32)$$

Les transformations de ϕ sont inchangées. Nous pouvons vérifier que $\delta S = 0$ sans faire référence aux équations du mouvement et donc la supersymétrie est aussi réalisée off-shell avec ces lois de transformation.

Nous verrons dans la suite de cet exposé que les champs F et D servent aussi à la brisure de la supersymétrie. Pourquoi briser la supersymétrie : simplement parce qu'on n'observe pas de particules supersymétriques de même masse que leurs partenaires dans la nature. D'ailleurs, on n'observe pas de particules supersymétriques du tout pour le moment !

3.5.2 Les interactions du multiplet chiral

Nous allons maintenant ajouter à notre théorie la possibilité de termes d'interaction entre ces deux types de champs qui composent les supermultiplets chiraux. Le terme d'interaction le plus général, invariant sous les transformations de supersymétrie et renormalisable, que nous allons ajouter dans le lagrangien libre vu précédemment, s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i + c.c. \quad (3.33)$$

Où la théorie est écrite pour une collection de supermultiplets chiraux étiquetés par un l'index i qui court sur tous les degrés de saveur et de jauge de la théorie. La quantité W^{ij} est symétrique dans les indices i et j . La seule forme possible pour W^{ij} qui préserve l'invariance par supersymétrie du Lagrangien d'interaction est alors :

$$W^{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j}, \quad (3.34)$$

où on définit le *superpotentiel* W que l'on écrit sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} m^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \quad (3.35)$$

dans le cadre d'une théorie renormalisable.

La dimension du superpotentiel est celle d'une masse au cube. Il fait intervenir la matrice symétrique de masse m^{ij} des fermions ¹ et la matrice totalement symétrique des couplages de Yukawa y^{ijk} entre un scalaire et 2 fermions. C'est, de plus, une fonction analytique des champs complexes ϕ_i c'est-à-dire qu'il est fonction de ϕ_i mais pas du complexe conjugué ϕ_i^* .

En imposant que \mathcal{L}_{int} soit invariant sous transformation de supersymétrie, on détermine la forme de W^i qui se trouve être la dérivée fonctionnelle de W par rapport au champ ϕ_i . Les équations du mouvement des champs auxiliaires F^i sont :

$$F_i = -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi^i} = -W_i^*, \quad F^{*i} = -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} = -W^i. \quad (3.36)$$

Nous pouvons les utiliser pour écrire le lagrangien sans les champs auxiliaires : Le *potentiel scalaire* V de la théorie est :

$$V = W_i^* W^i = F_i F^{*i}, \quad (3.37)$$

qui est automatiquement non-négatif puisque c'est la somme de carrés. Si nous employons la forme générale (3.35) du superpotentiel, nous avons alors le lagrangien général pour un supermultiplet chiral en interaction :

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* - i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m^{ij} \psi_i \psi_j - \frac{1}{2} m_{ij}^* \psi^\dagger_i \psi^\dagger_j - V - \frac{1}{2} y^{ijk} \phi_i \psi_j \psi_k - \frac{1}{2} y_{ijk}^* \phi^*_i \psi^\dagger_j \psi^\dagger_k. \quad (3.38)$$

3.5.3 Théorie de jauge supersymétrique

Le MS, qui est la théorie qui nous intéresse et que nous voulons "supersymétriser", a, outre des champs fermioniques chiraux (les quarks, les leptons), des champs de jauge de spin 1 (bosons W , Z , gluons,...). Dans la section dédiée à l'algèbre supersymétrique nous avons vu que le supermultiplet vecteur pouvait accueillir de tels champs de jauge. Voyons donc comment se comporte un tel supermultiplet, sans et avec interaction.

Le supermultiplet vecteur contient un boson de jauge A_a^μ , de masse nulle, un fermion de Weyl, le jaugino λ_a , également de masse nulle, ainsi qu'un champ scalaire réel auxiliaire D_a qui est l'analogue du champ F précédent. La forme du lagrangien est complètement déterminée par la condition d'invariance de jauge et la renormalisabilité :

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - i\lambda^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a, \quad (3.39)$$

où les dérivées covariantes de jauge D_μ et le tenseur de force $F_{\mu\nu}^a$ sont donnés par :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.40)$$

$$D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a - g f^{abc} A_\mu^b \lambda^c, \quad (3.41)$$

¹La supersymétrie assure que c'est aussi la matrice de masse des bosons scalaires associés.

comme habituellement pour une théorie de jauge. Ce lagrangien est déjà supersymétrique et les transformations de supersymétrie de paramètre ϵ pour les champs du supermultiplet vecteur sont :

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda^a + \lambda^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu \epsilon), \quad (3.42)$$

$$\delta \lambda_\alpha^a = -\frac{i}{2\sqrt{2}} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \epsilon)_\alpha F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_\alpha D^a, \quad (3.43)$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}} (\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a - D_\mu \lambda^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu \epsilon). \quad (3.44)$$

Sans interaction avec aucun supermultiplet chiral, l'équation du mouvement pour le champ D^a est simplement $D^a = 0$ que nous obtenons directement du Lagrangien (3.39). Il n'a pas de terme cinétique et ne se propage donc pas.

Dans le MS, les champs de jauge interagissent avec les fermions chiraux. Dans notre version supersymétrique il nous faut donc considérer les interactions entre le supermultiplet chiral et le supermultiplet vecteur. Comme dans le cas non-supersymétrique, les dérivées usuelles ∂^μ des fermions sont maintenant à remplacer par des dérivées covariantes de jauge D^μ . De plus, le lagrangien doit comporter des termes supplémentaires qui traduisent les interactions entre supermultiplets chiraux et vecteurs. Les lois de transformation supersymétriques du supermultiplet chiral changent pour prendre en compte la variation des nouveaux termes. L'équation du mouvement pour D^a est alors (les T^a sont les générateurs du groupe de jauge selon lesquels les supermultiplets chiraux se transforment et g est la constante de couplage) :

$$D^a = -g(\phi^* T^a \phi), \quad (3.45)$$

et le potentiel scalaire complet est :

$$V = F_i F^{*i} + \frac{1}{2} \sum_a D^a D^a = W_i^* W^i + \frac{1}{2} \sum_a g^2 (\phi^* T^a \phi)^2. \quad (3.46)$$

Ce potentiel scalaire est automatiquement non-négatif et s'avère très important pour la brisure de symétrie. Nous parlons de termes F et de termes D pour faire référence respectivement au premier et deuxième terme du potentiel.

3.5.4 Les modèles $\mathcal{N} \geq 2$

Le nombre de générateurs supersymétriques Q_α que nous pouvons introduire peut être supérieur ou égal à 1 (nous parlerons de supersymétrie $\mathcal{N} \geq 1$). Après tout, les théories supersymétriques $\mathcal{N} \geq 2$ possèdent davantage de symétries et de ce fait il se trouve qu'elles ont moins de divergences ce qui les rend très intéressantes. En effet, dans le cas $\mathcal{N} = 2$ il n'y a qu'un nombre fini de diagrammes qui divergent et dans le cas $\mathcal{N} = 4$ il n'y en a plus du tout ! Une théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 4$ est intrinsèquement finie. Tout naturellement, nous aimerions donc construire un modèle $\mathcal{N} = 4$ englobant le Modèle

Standard. Malheureusement, à basse énergie (en dessous du TeV), les modèles $\mathcal{N} \geq 2$ ne sont pas réalistes. Ils ne permettent pas la violation de la parité que nous observons dans les interactions faibles. En effet, un supermultiplet d'une théorie supersymétrique $\mathcal{N} \geq 2$ possède toujours les 2 hélicités opposées à la fois donc particules "gauches" et "droites" siègent dans le même supermultiplet. Ce qui implique qu'elles ont les mêmes interactions (car elles sont dans la même représentation du groupe de jauge). C'est malheureusement une conclusion contraire aux observations expérimentales qui nous disent par exemple que l'électron "gauche" (qui fait partie d'un doublet dans le MS) n'a pas la même interaction avec les bosons W que l'électron "droit" (qui est un singulet d'isospin faible nul et qui ne "ressent" pas l'interaction faible). Les modèles $\mathcal{N} \geq 2$ ne peuvent donc pas décrire la physique des particules à basse énergie.

3.5.5 Quelques mots sur le formalisme des superchamps

Bien qu'il soit possible de construire des Lagrangiens supersymétriques directement à partir des champs composant un supermultiplet, la procédure est facilitée avec l'introduction des superchamps [27]. Un champ ordinaire est fonction des coordonnées d'espace-temps. Un superchamp S est aussi fonction de variables de Grassmann anticommutantes $S(x, \theta, \bar{\theta})$. Ces variables θ_α et $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ se transforment comme des spineurs de Weyl à deux composantes :

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (3.47)$$

Les champs du supermultiplets apparaissent comme des coefficients dans le développement en puissances des variables θ et $\bar{\theta}$ qui se terminent nécessairement après un nombre fini de termes puisque les variables de Grassmann anticommutent. Le superchamp contient plus d'un supermultiplet et les supermultiplets chiral et vecteur sont obtenus après avoir imposé au superchamp correspondant les contraintes appropriées. Pour obtenir les champs du supermultiplet chiral, il faut imposer qu'une dérivée covariante appropriée du superchamp s'annule. Pour obtenir le supermultiplet vecteur, il faut que $S = S^\dagger$.

Le formalisme des superchamps est utile car il permet de traiter les supermultiplets comme des objets à part entière.

3.6 Les modèles supersymétriques à basse énergie

Nous allons offrir une promotion au modèle standard en le "supersymétrisant" et en conservant toutes ses caractéristiques. Le modèle minimal (en contenu en particules) que nous pouvons obtenir est le MSSM (Minimal Supersymmetric Standard Model). Nous présenterons son contenu en particules (la nomenclature des nouvelles particules), nous expliquerons comment la symétrie électrofaible peut se briser, et nous décrirons la brisure effective de supersymétrie (brisure dite "douce"). Nous aborderons juste après les prédictions typiques du MSSM. Enfin, nous parlerons aussi des variantes possibles du MSSM car la nature a pu très bien choisir une voie un peu plus complexe que ce modèle minimal.

3.6.1 La zoologie du Modèle Standard Supersymétrique Minimal

Le paragraphe précédent nous a enseigné que le cas minimal $\mathcal{N} = 1$ était aussi le seul cas réaliste à basse énergie pour englober le Modèle standard. Les supermultiplets dont nous disposons sont :

- le supermultiplet chiral qui comprend un fermion de spin 1/2 et un boson de spin 0,
- le supermultiplet vecteur qui comprend un boson de spin 1 et un fermion de spin 1/2.

Pouvons nous ranger toutes nos particules du Modèle standard dans ces multiplets ? Autrement dit, pouvons nous associer les quarks et leptons aux bosons W, Z, au photon, etc ?

Malheureusement, cela poserait des problèmes pour la conservation des nombres quantiques. En effet, les bosons de jauge et les fermions n'ont pas les mêmes propriétés de transformation sous les groupes de jauge donc possèdent des nombres quantiques différents. La supersymétrie ne modifie pas ces nombres quantiques, on ne peut donc pas associer un boson de jauge à un fermion connu ou inversement. Il nous faut donc inventer des (super)partenaires à toutes les particules connues ! Le tableau suivant, (3.1), donne à chaque particule connue le nom, le spin et l'abréviation de son super-partenaire.

Particule	Spartenaire	Spin
quarks q → top t → bottom b ...	squarks \tilde{q} stop \tilde{t} sbottom \tilde{b}	0
leptons l → neutrino ν_e → muon μ ...	sleptons \tilde{l} sneutrino $\tilde{\nu}_e$ smuon $\tilde{\mu}$	0
bosons de jauge → photon γ → boson Z → boson B → boson W → gluon g	jauginos photino $\tilde{\gamma}$ zino \tilde{Z} bino \tilde{B} wino \tilde{W} gluino \tilde{g}	1/2
bosons de Higgs $H_i^{\pm,0}$	higgsinos $\tilde{H}_i^{\pm,0}$	1/2

TAB. 3.1 – Les particules du MSSM.

Avant de passer aux sections suivantes, nous allons formuler plusieurs remarques. Tout d'abord nous avons aussi, outre les nouveaux spartenaires, au moins deux doublets de bosons de Higgs. Pourquoi a-t-il fallu aussi ajouter des bosons de Higgs ? Dans l'étude des théories de champs supersymétriques nous avons introduit la notion de superpotentiel. Celui-ci résume toutes les interactions possibles des particules (qui ne font pas intervenir les bosons de jauge) donc en particulier les interactions de Yukawa avec les champs de Higgs. Ce superpotentiel ne peut pas être fonction de champs complexes conjugués. Or dans le MS, pour donner une masse aux quarks type "up" nous utilisons un terme $QU^c H^*$. Comme en supersymétrie ce genre de terme est interdit nous devons utiliser un nouveau champ de Higgs, d'hypercharge $Y = -1$, et le coupler simplement (sans conjugaison complexe) : $QU^c H_u$. Ce nouveau champ, après brisure électrofaible nous laissera donc d'autres bosons de Higgs dont certains seront chargés (voir plus loin). Ce nouveau doublet de Higgs est aussi nécessaire pour annuler les possibles anomalies.

Deuxièmement, nous savons bien que dans le MS un fermion droit subit un traitement différent d'un fermion gauche. Ils auront en supersymétrie chacun un supermultiplet avec chacun un spartenaire. Par exemple $q_L \rightarrow \tilde{q}_L$ et $q_R \rightarrow \tilde{q}_R$. Ces deux squarks sont bien différents et pour les identifier nous laisserons l'indice de chiralité L ou R tout en sachant qu'il n'a pas de sens physique pour une particule scalaire (spin 0 donc une seule hélicité $\lambda = 0$).

Troisièmement, pourquoi avons nous fait le choix d'avoir des spartenaires de spin inférieur ? *A priori* nous aurions pu associer à tous les fermions du MS des spartenaires de spin 1 et aux bosons de jauge de spin 1 des spartenaires de spin 3/2. Cependant, introduire une particule de spin 1 signifie introduire une nouvelle interaction et implique un modèle non-minimal. De plus, introduire des particules de spin >1 rend la théorie non-renormalisable².

Enfin, les $\tilde{\gamma}$, \tilde{Z} , \tilde{W} , \tilde{H} ne s'observent pas directement. En effet, ils se mélangent et donc n'apparaissent que des combinaisons de ces jauginos et higgsinos : celles-ci ont pour nom les *neutralinos* et les *charginos* :

- Les neutralinos $\tilde{N}_{1,2,3,4}^0$ ³ sont de charge électrique nulle et mélangent en particulier les fermions \tilde{B} , \tilde{W}^0 , \tilde{H}_u^0 et \tilde{H}_d^0 .
- Les charginos $\tilde{C}_{1,2}^\pm$ ⁴ sont chargés électriquement et mélangent les \tilde{W}^\pm et les \tilde{H}^\pm .

3.6.2 Le modèle

Le MSSM est l'extension supersymétrique minimale du MS. Les quarks et les leptons sont alors mis dans des superchamps chiraux avec leurs superpartenaires et ces superchamps forment des supermultiplets chargés sous $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ de la même façon que

²En analysant en théorie des champs ce qui rend les diagrammes divergents, on aboutit à une condition pour qu'un terme du lagrangien soit renormalisable : $\Delta = 4 - d - \sum_i n_i(s_i + 1) \geq 0$ où d est le nombre de dérivées, n_i est le nombre de champs du type i dans le terme d'interaction et s_i leur spin. Si le spin est trop élevé on tombe inévitablement sur des termes non-renormalisables.

³notés aussi dans la littérature $\tilde{\chi}_{1,2,3,4}^0$

⁴notés aussi souvent $\tilde{\chi}_{1,2}^\pm$

les multiplets du Modèle Standard. Les bosons de jauge sont quant à eux placés avec leurs superpartenaires fermioniques dans des supermultiplets vecteurs.

Le superpotentiel le plus général, mais minimal, du MSSM est alors :

$$\mathcal{W} = \mathcal{Y}_u \bar{U} Q H_u + \mathcal{Y}_d \bar{D} Q H_d + \mathcal{Y}_e \bar{E} L H_d + \mu H_u H_d. \quad (3.48)$$

La notation $\bar{\psi}$ signifie que les champs du supermultiplet sont des champs conjugués de charge ψ^c . Les champs conjugués apparaissent car nous avons choisi de ne travailler qu'avec des champs gauches. Les champs droits s'obtiennent justement par cette opération de conjugaison. De plus, les indices de $SU(2)$ ont été supprimés pour ne pas alourdir l'expression. Nous avons en fait $\mu(H_u)_\alpha(H_d)_\beta\epsilon^{\alpha\beta}$, $(\mathcal{Y}_u)^{ij}\bar{U}_{ai}Q_{j\alpha}^a(H_u)_\beta\epsilon^{\alpha\beta}$,

Les \mathcal{Y} sont les matrices de Yukawa, 3×3 dans l'espace des saveurs et sont sans dimensions. Elles donnent les masses des quarks et leptons ainsi que les angles et phases de CKM après la brisure électrofaible.

Les deux champs de Higgs, H_u et H_d , ont été introduit pour respecter la condition d'analyticité du superpotentiel ⁵ et donner une masse aux particules "up" et "down" ainsi que pour la condition d'annulation des anomalies. Mais une fois que nous avons deux champs de Higgs, un terme qui couple les deux peut *a priori* exister. Ce terme cependant (le couplage μ) donne naissance au problème " μ " : phénoménologiquement, il est de l'ordre du TeV alors que dans le MSSM rien ne le force à être aussi bas. Dans un modèle plus fondamental, μ pourrait être lié à l'échelle de brisure de la supersymétrie.

Une fois que ce superpotentiel a été écrit, nous pouvons trouver toutes les interactions possibles (mais non de jauge) entre les particules et écrire le lagrangien d'interaction, grâce à l'équation (3.33), ainsi que le potentiel effectif de la théorie, formule (3.46).

3.6.3 La brisure douce de la supersymétrie

Il reste cependant à introduire dans le modèle la brisure de la supersymétrie. Mais le mécanisme et l'échelle réelle de la brisure sont encore inconnues. Ce que nous pouvons faire c'est paramétriser à basse énergie cette brisure. Ceci se fait en ajoutant des termes au lagrangien qui brise explicitement la supersymétrie. La forme générale de ce lagrangien de brisure \mathcal{L}_{soft} est :

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_{soft} = -\frac{1}{2}(M_\lambda \lambda^a \lambda^a + c.c) - m_{ij}^2 \phi_j^* \phi_i + \left(\frac{1}{2} b_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} a_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + c.c\right) \quad (3.49)$$

Il brise bien la supersymétrie car seuls les scalaires (ϕ_i) et les jauginos (λ^a) ont un terme de masse. La brisure, bien qu'explicite ⁶, est dite "douce" ("soft" en anglais) car on peut montrer qu'elle n'introduit pas de divergences quadratiques. Tous les modèles de brisure, qu'ils aient leur origine dans les théories des cordes ou de supergravité, conduisent à basse

⁵C'est-à-dire l'absence de champs complexes conjugués ϕ^* .

⁶par opposition à spontanée

énergie à cette forme de \mathcal{L}_{soft} . Avec les champs du MSSM, \mathcal{L}_{soft} s'écrit :

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}_{soft} = & \frac{1}{2}(M_3\tilde{g}\tilde{g} + M_2\tilde{W}\tilde{W} + M_1\tilde{B}\tilde{B} + c.c) \\
 & + \tilde{Q}^\dagger m_Q^2 \tilde{Q} + \tilde{U}^\dagger m_{\tilde{U}}^2 \tilde{U} + \tilde{D}^\dagger m_D^2 \tilde{D} + \tilde{L}^\dagger m_L^2 \tilde{L} + \tilde{E}^\dagger m_E^2 \tilde{E} \\
 & + (\tilde{U}^\dagger a_U \tilde{Q} H_u - \tilde{D}^\dagger a_D \tilde{Q} H_d - \tilde{E}^\dagger a_E \tilde{L} H_d + c.c) \\
 & + m_{H_u}^2 H_u^* H_u + m_{H_d}^2 H_d^* H_d + (b H_u H_d + c.c)
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Les masses M_3 , M_2 , M_1 des jauginos sont en général complexes, ce qui introduit 6 paramètres. Les m_Q , m_L , $m_{\tilde{u}}, \dots$, sont les matrices de masse des squarks et sleptons, hermitiennes et de taille 3×3 dans l'espace des saveurs, ce qui fait 45 paramètres inconnus. Les couplages a_U , a_D, \dots , sont des couplages trilineaires, 3×3 et complexes donc caractérisés par 54 paramètres. Enfin, les couplages bilinéaires des Higgs introduisent 4 paramètres. En tout, \mathcal{L}_{soft} contient 109 paramètres inconnus ! La supersymétrie introduit donc beaucoup de paramètres. Ce nombre de paramètres "soft" peut cependant être diminué en redéfinissant les champs grâce à des symétries ou des hypothèses supplémentaires. La mesure des paramètres de brisure douce permettra de tester les modèles de plus haute énergie.

Dans les modèles dits *msugra*, on peut réduire le nombre de paramètres à 5 moyennant un certain nombre d'hypothèses sur le caractère à haute énergie de la théorie supersymétrique.

3.7 La brisure de la supersymétrie

La brisure de la supersymétrie est nécessaire. En effet, nous n'observons pas de particules supersymétriques de même masses que leurs partenaires usuels : $m_e \neq m_{\tilde{e}}$, $m_\gamma \neq m_{\tilde{\gamma}}$. Or, l'algèbre de supersymétrie implique que deux états liés par une transformation de supersymétrie ont les mêmes valeurs propres pour l'opérateur P^2 donc la même masse. Il faut donc briser la supersymétrie. La question est de savoir si la brisure est explicite c'est-à-dire présente dans le Lagrangien sous-jacent à la théorie ou bien, si la brisure est spontanée, c'est-à-dire induite par un état de vide non supersymétrique. Plusieurs raisons jouent en défaveur d'une brisure explicite. C'est d'une part non esthétique, ensuite ce n'est pas une manière analogue à celle avec laquelle sont brisées les symétries de jauge, enfin, cela conduirait à des incohérences dans les théories de supergravité. Ainsi, les théoriciens se sont concentrés sur la brisure spontanée de la supersymétrie.

Si le vide est non supersymétrique, il existe un état fermionique χ qui est couplé au vide par l'intermédiaire de l'opérateur fermionique Q (qui correspond à la charge supersymétrique) :

$$\langle 0|Q|\chi \rangle = f_\chi^2 \neq 0. \tag{3.51}$$

Le fermion χ est l'équivalent du boson de Goldstone dans les symétries bosoniques spontanément brisées. Le champ χ étant un champ fermionique, on l'appelle donc fermion de Goldstone ou Goldstino.

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé de supersymétrie que dans le sens d'une symétrie globale, c'est-à-dire dont les transformations ne dépendent pas de l'espace-temps, donc n'incluant pas la gravité. C'est dans ce cadre que l'on se place pour le moment : ainsi ce que l'on brise à ce stade est une symétrie globale. Or, un problème apparaît lorsqu'on brise la supersymétrie globale : l'énergie du vide est positive⁷. Pour le constater, il suffit de voir la valeur dans le vide de l'anticommutateur des charges Q :

$$\{Q, Q\} \propto \gamma_\mu P^\mu. \quad (3.52)$$

et donc en introduisant la relation de fermeture $|\chi\rangle\langle\chi| = 1$:

$$\langle 0|\{Q, Q\}|0\rangle = |\langle 0|Q|\chi\rangle|^2 = f_\chi^4 \propto \langle 0|P_0|0\rangle = E_0, \quad (3.53)$$

nous constatons ainsi que la brisure de la supersymétrie globale entraîne :

$$E_0 = f_\chi^4 > 0. \quad (3.54)$$

On obtient une valeur de l'énergie du vide strictement positive.

3.7.1 Terme F et terme D

Afin de voir comment on peut obtenir une valeur de l'énergie du vide non nulle, reprenons le potentiel effectif d'une théorie supersymétrique globale :

$$V = \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial \phi^i} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_\alpha g_\alpha^2 |\phi^* T^\alpha \phi|^2. \quad (3.55)$$

Rappelons que le premier terme est appelé terme F, et le second est le terme D. Ainsi pour obtenir une valeur de l'énergie du vide non nulle, il faut soit que le terme F soit défini positif (valeur moyenne dans le vide non nulle) soit que le terme D soit défini positif.

Terme D

L'option $D > 0$ implique de construire un modèle avec un groupe de symétrie de jauge $U(1)$. L'exemple le plus simple consiste à prendre un supermultiplet chiral avec une charge unité pour lequel le potentiel effectif est :

$$V_D = \frac{1}{2} (\xi + g\phi^*\phi)^2. \quad (3.56)$$

Le terme supplémentaire ξ n'est pas permis dans une théorie non-abélienne c'est la raison pour laquelle il nous faut utiliser une théorie qui possède un groupe de jauge $U(1)$. Le minimum du potentiel effectif est atteint pour $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$ et alors $V_D = 1/2\xi^2 > 0$ et la supersymétrie est spontanément brisée. Dans cet état de vide, on trouve que :

$$m_\phi = g\xi, m_\psi = 0, m_V = m_{\bar{V}} = 0. \quad (3.57)$$

⁷C'est un problème au niveau cosmologique car l'on s'attendrait plutôt à une valeur nulle ou très proche de 0

On distingue nettement dans cet exemple la différence de masse entre boson et fermion qui correspondent au supermultiplet (ϕ, ψ) . Malheureusement, on ne peut pas utiliser le groupe de jauge $U(1)$ de l'électromagnétisme dans le modèle standard. En effet, dans le Modèle Standard, il y a des champs qui ont des signes différents pour l'hypercharge permettant au potentiel effectif de s'annuler. On doit rajouter un nouveau groupe de jauge $U(1)$ mais aussi de nombreux nouveaux champs pour annuler les anomalies triangulaires supplémentaires qui apparaissent à cause de ce nouveau groupe de jauge. Ainsi, le modèle de brisure de supersymétrie avec un terme D n'a pas suscité énormément d'intérêt bien qu'aujourd'hui il connaisse un renouveau dans le cadre des modèles dérivés des théories de cordes.

Terme F

L'option $F > 0$ implique des champs chiraux supplémentaires avec des couplages artificiels : ceux du Modèle Standard ne suffisent pas ; l'exemple le plus simple consiste à prendre trois supermultiplets chiraux A, B, C avec le superpotentiel suivant :

$$W = \alpha AB^2 + \beta C(B^2 - m^2). \quad (3.58)$$

On trouve les termes F correspondants :

$$F_A = \alpha B^2, F_B = 2B(\alpha A + \beta C), F_C = \beta(B^2 - m^2), \quad (3.59)$$

et le potentiel effectif se réécrit :

$$V_F = \sum_i |F_i|^2 = 4|B(\alpha A + \beta C)|^2 + |\alpha B^2|^2 + |\beta(B^2 - m^2)|^2. \quad (3.60)$$

On vérifie que les trois termes de l'équation précédente ne peuvent pas s'annuler simultanément. Ainsi, on obtient nécessairement $V_F > 0$ et la supersymétrie est brisée.

Pour conclure cette section, nous pouvons dire qu'il n'existe pas de moyen satisfaisant de briser la supersymétrie globale car d'une façon ou d'une autre, on est amené soit à rajouter de nouveaux champs de matière et des couplages artificielles, soit à introduire un nouveau groupe de jauge et d'autres champs. Dans les années 1980, des tentatives ont été faites pour "dissimuler" les champs supplémentaires dans un secteur caché mais il s'est révélé qu'il était très compliqué d'obtenir un modèle phénoménologiquement viable. De plus, la brisure de la supersymétrie globale implique nécessairement une énergie du vide non nulle : à première vue, cela n'est pas une mauvaise chose ; en effet, les observations actuelles tendent à prouver que l'énergie du vide n'est pas nulle. Le problème fondamental vient du fait que la mesure de cette énergie du vide est complètement en désaccord avec la prédiction de l'énergie du vide de la supersymétrie globale : la valeur mesurée de l'énergie du vide est :

$$\Lambda \sim 10^{-123} m_P^4, \quad (3.61)$$

alors que l'énergie du vide de la supersymétrie brisée prédit une constante cosmologique :

$$\Lambda \sim (1 \text{ TeV})^4 \sim 10^{-64} m_P^4. \quad (3.62)$$

Nous obtenons une différence de 60 ordres de grandeur ! Pour discuter de la brisure de la supersymétrie de manière plus satisfaisante, il faut une théorie supersymétrique incluant la gravité : c'est l'objectif du prochain chapitre.

3.7.2 Supersymétrie locale ou Supergravité

Jusqu'à présent, nous avons considéré les transformations globales de supersymétrie dans lesquelles le spineur des transformations infinitésimales E est indépendant de l'espace-temps. Nous allons maintenant considérer un spineur de transformations dépendant de l'espace-temps $E(x)$ par analogie avec les symétries bosoniques qui, une fois rendu locales, donnent naissance aux théories de jauge.

De plus, le fait de rendre la supersymétrie locale conduit à un mécanisme analogue au mécanisme de Higgs pour briser les symétries bosoniques : le mécanisme de super-Higgs qui permettra de briser de manière élégante la supersymétrie. En prime, une théorie locale de la supersymétrie contient nécessairement, comme nous le verrons, la gravité (c'est la raison pour laquelle cette théorie se nomme la Supergravité) et ouvre la perspective d'unifier toutes les interactions des particules et les champs de matière avec des transformations de supersymétrie étendue :

$$G(J=2) \rightarrow \tilde{G}(J=3/2) \rightarrow V(J=1) \rightarrow q, \ell(J=1/2) \rightarrow H(J=0), \quad (3.63)$$

où G est le graviton de spin 2 et \tilde{G} est le gravitino, son partenaire supersymétrique de spin-3/2, qui s'inscrivent tous deux dans le supermultiplet de la gravitation :

$$\begin{pmatrix} G \\ \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

La Supergravité est un ingrédient essentiel pour la compréhension des interactions gravitationnelles des particules supersymétriques, et donc nécessaire à une discussion cohérente de l'énergie du vide.

3.7.3 Supergravité

Pour comprendre pourquoi le fait de rendre la supersymétrie locale implique une présence de la gravité dans la théorie, considérons ce qui arrive si l'on applique à un supermultiplet chirale les deux transformations de supersymétrie suivantes :

$$\delta_i \phi = \sqrt{2} \bar{E}_i \psi + \dots, \quad (3.65)$$

$$\delta_j \psi = -i\sqrt{2} \gamma_\mu \partial^\mu \phi E_j + \dots \quad (3.66)$$

Si l'on construit le commutateur sur les champs ϕ ou ψ , on obtient :

$$[\delta_i, \delta_j](\phi, \psi) = -2(\bar{E}_j \gamma_\mu E_i) i \partial_\mu (\phi, \psi). \quad (3.67)$$

On observe que l'effet sur les champs est équivalent à une translation d'espace-temps, puisque $i\partial_\mu \leftrightarrow P_\mu$.

Si les transformations spinorielles infinitésimales $E_{i,j}$ sont indépendantes de x , la translation est globale et la théorie est invariante par translation globale. Mais si les $E_{i,j}$ dépendent de la position dans l'espace-temps, on obtient que le commutateur appliqué au champ est équivalent à un changement de coordonnées locales sur les champs et donc la théorie est invariante par changement de coordonnées locales. Or, nous savons qu'une théorie invariante par changement de coordonnées locales contient nécessairement la gravité : l'invariance par changement de coordonnées locales est un des points de départ de la construction de la Relativité Générale qui est la théorie de la gravité.

Analogie avec les théories de jauge

Dans cette section nous verrons que le gravitino émerge naturellement comme champ de jauge de la supersymétrie. Considérons, dans un premier temps, la variation du terme cinétique d'un fermion sous une transformation de jauge : $\delta(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)$. Dans une transformation de jauge, le champ fermionique devient :

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\epsilon(x)}\psi(x), \quad (3.68)$$

où $\epsilon(x)$ est une variation de phase dépendante de la position dans l'espace-temps. Ainsi, un terme supplémentaire, par rapport à une théorie où la phase est indépendante de l'espace-temps, apparaît dans la variation du terme cinétique :

$$-\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\partial^\mu\epsilon(x). \quad (3.69)$$

Pour annuler cette variation et maintenir l'invariance du lagrangien sous les transformations de jauge, on introduit un champ dit champ de jauge : $A^\mu(x)$. Dans une symétrie de jauge abélienne, il intervient dans le Lagrangien sous cette forme :

$$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) \quad (3.70)$$

et se transforme ainsi :

$$\delta A^\mu(x) = \partial^\mu\epsilon(x). \quad (3.71)$$

Dans le cas de transformations locales de supersymétrie, la variation du champ fermionique est :

$$\delta\psi(x) = -i\gamma_\mu\partial^\mu(\phi(x)E(x)) + \dots, \quad (3.72)$$

et ainsi, la variation du terme cinétique fermionique contient un terme :

$$\propto \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\partial^\nu\phi\partial^\mu E(x) \quad (3.73)$$

qui est compensé par l'introduction d'un terme contenant un nouveau champ ψ_μ :

$$\kappa\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\partial^\nu\phi\psi_\mu(x) \quad (3.74)$$

qui se transforme comme ceci sous la supersymétrie :

$$\delta\psi_\mu(x) = -\frac{2}{\kappa}\partial_\mu E(x). \quad (3.75)$$

Le nouveau champ ψ_μ est un spineur avec un indice de Lorentz : donc il possède spin $3/2$. Il est le champ de jauge de la supersymétrie : c'est un fermion de jauge. Comme il a un spin $3/2$, il ne peut être que le partenaire supersymétrique du graviton de spin 2 : c'est donc le gravitino.

Le Lagrangien de pure Supergravité

Considérons le plus simple Lagrangien pour un gravitino et un graviton. Il consiste en la somme du Lagrangien de Einstein-Hilbert pour la Relativité Générale (description du graviton) et celui de Rarita-Schwinger pour un champ de spin $3/2$ (description du gravitino). Bien entendu, il faut rendre invariant le Lagrangien de Rarita-Schwinger sous transformations générales de coordonnées en covariantisant la dérivée :

$$L = -\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}R - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\mathcal{D}_\rho\psi_\sigma, \quad (3.76)$$

où $g = \det(g_{\mu\nu})$ et $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique :

$$g_{\mu\nu} \equiv \epsilon_\mu^m \epsilon_\nu^n \eta_{mn} \quad (3.77)$$

où ϵ_μ^m est le vierbein (qui décrit, entre autres, le champ du graviton) et

$$\mathcal{D}_\rho \equiv \partial_\rho + \frac{1}{4}\omega_\rho^{mn}[\gamma_m, \gamma_n], \quad (3.78)$$

est la dérivée covariante avec ω_ρ^{mn} la connexion de spin. Ce Lagrangien est naturellement invariant sous transformations locales de supersymétrie. Les champs se transforment de la manière suivante :

$$\delta\epsilon_\mu^m = \bar{E}(x)\gamma^m\psi_\mu(x), \quad (3.79)$$

$$\delta\omega_\mu^{mn} = 0, \quad (3.80)$$

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{\kappa}\mathcal{D}_\mu E(x). \quad (3.81)$$

3.7.4 Le mécanisme de Super-Higgs

Dans le Lagrangien précédent, nous n'avons pas inclus le couplage à la matière, dont nous parlerons plus tard. Cependant, nous pouvons déjà parler du mécanisme de brisure spontanée de la supersymétrie locale : le mécanisme de super-Higgs. En effet, nous venons d'introduire le gravitino qui se trouve au centre de ce mécanisme. Rappelons que dans le mécanisme de Higgs conventionnel, un boson de Goldstone sans masse (de spin 0 donc avec une seule polarisation) est absorbé par un boson de jauge sans masse (d'hélicité $+$ ou -1

donc avec deux états de polarisation) qui va acquérir par ce processus les degrés de liberté du boson de Goldstone et donc posséder trois états de polarisations qui lui permettent d'acquérir une masse :

$$2 \times (V_{m=0}) + 1 \times (GB) = 3 \times (V_{m \neq 0}). \quad (3.82)$$

Dans une théorie localement supersymétrique, les deux états de polarisation (hélicité + ou - 1/2) du fermion de Goldstone sans masse sont absorbés par un gravitino sans masse d'hélicité + ou - 3/2, donc avec deux états de polarisation, pour lui donner les quatre états de polarisations nécessaires à l'obtention d'une masse :

$$2 \times (\psi_{m=0}^\mu) + 2 \times (GF) = 4 \times (\psi_{m \neq 0}^\mu). \quad (3.83)$$

Ce processus brise la supersymétrie locale, puisqu'il donne une masse au gravitino alors que le graviton n'en a pas : $m_G = 0 \neq m_{\tilde{G}} \neq 0$. C'est le seul moyen consistant pour briser la supersymétrie. De plus, il peut se faire en donnant une énergie nulle au vide :

$$\langle 0|V|0 \rangle = 0 \leftrightarrow \Lambda = 0. \quad (3.84)$$

Ainsi, on peut obtenir à la fois une brisure de la supersymétrie locale et une constante cosmologique nulle, ce qui n'était pas le cas de la brisure globale de supersymétrie.

3.7.5 Couplage de la Supergravité à la matière

Le Lagrangien complet de la Supergravité incluant les multiplets vecteurs et chiraux peut être obtenu par la méthode de calcul tensoriel locale. C'est un travail laborieux. Nous ne donnerons que quelques éléments clés sans écrire de preuves. Parmi ces expressions nouvelles par rapport à la supersymétrie globale, on trouve principalement le potentiel de Kähler. Le potentiel de Kähler est une fonction des champs scalaires (contenus dans les supermultiplets chiraux) : $G(\phi, \phi^*)$. Le superpotentiel est relié au potentiel de Kähler. Il caractérise la variété de Kähler, car il décrit une géométrie interne qui influe directement sur les termes cinétiques des champs fermioniques et scalaires et qui détermine la masse des particules après la brisure de supersymétrie. C'est aussi un paramètre d'ordre pour la brisure de supersymétrie :

$$m_{\tilde{G}} \equiv m_{3/2} = e^{\frac{G_0}{2}} | \langle W \rangle |, \quad (3.85)$$

où G_0 est la valeur dans le vide de G et $\langle W \rangle$ est la valeur dans le vide du superpotentiel W^8 .

Comme nous l'avons dit, G détermine les termes cinétiques des champs fermioniques et des champs scalaires. Dans le cas des champs scalaires :

$$L_K = G_i^j \partial^\mu \phi_j^* \partial_\mu \phi^i, \quad (3.86)$$

⁸ $W = W_{cach} + W_{obs}$ et $\langle W_{obs} \rangle = 0$ mais $\langle W_{cach} \rangle \neq 0$.

où G_i^j est la métrique de Kähler :

$$G_i^j \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^i \partial \phi_j^*}, \quad (3.87)$$

Le potentiel effectif sans la présence des termes D est aussi déterminé par le potentiel de Kähler :

$$V = e^G [G_i(G_j^i)^{-1} G^j - 3] \text{ avec } G_i \equiv \frac{\partial G}{\partial \phi^i}. \quad (3.88)$$

On remarque que ce potentiel peut s'annuler sans empêcher la brisure de supersymétrie, ce qui n'était pas le cas dans la supersymétrie globale. En effet, on peut avoir simultanément $m_{\tilde{G}}^2 = e^G \neq 0$ et $V = 0$.

L'état de vide de la théorie doit correspondre à un minimum de V . Or, il se trouve que pour des formes générales de G , et pour certaines valeurs des champs, le potentiel V devient négatif : ceci constitue une catastrophe pour la cosmologie, puisque cela signifierait que la constante cosmologique est négative et donc que l'Univers s'effondre sur lui-même. Heureusement, il existe une classe particulière de potentiels de Kähler, non négatifs. Il se trouve que c'est la classe de potentiels qui émerge des théories de cordes.

De même qu'il existe un potentiel de Kähler qui détermine la géométrie et la cinétique des champs chiraux, il existe une fonction appelée fonction cinétique notée $f(\phi)$ qui détermine les termes cinétiques des supermultiplets vecteurs.

3.7.6 Théorie effective aux basses énergies

La théorie basse-énergie trouve son origine dans une théorie haute-énergie : la théorie la plus générale de supergravité n'est pas renormalisable, mais les termes non renormalisables ne sont pas importants à basses énergies. Donc, en première approximation on peut ne garder que des termes renormalisables dans le potentiel effectif de la supergravité à basses énergies. Pour des choix génériques du potentiel de Kähler, on obtient des masses issues de la brisure de la supersymétrie non nulles pour les jauginos :

$$m_{1/2} \propto m_{\tilde{G}} \equiv m_{3/2}. \quad (3.89)$$

L'universalité des masses des jauginos correspondant aux différents groupes de jauge $SU(3)$, $SU(2)$ et $U(1)$ n'est pas systématique, mais cela émerge naturellement si la géométrie n'est pas trop compliquée, par exemple si la fonction cinétique $f(\phi)$ est un singulet. En développant le potentiel effectif, on trouve des termes proportionnels à $|\phi|^2$, qui sont interprétés comme les masses des scalaires issues de la brisure de la supersymétrie :

$$m_0 \propto m_{\tilde{G}} \equiv m_{3/2}. \quad (3.90)$$

Dans ce cas, il n'y a aucune raison théorique d'avoir universalité des masses : les modèles issus des théories de cordes brisent souvent cette universalité. Par contre, il y a de bonnes raisons phénoménologiques pour penser que les masses des scalaires avec la même charge

sont identiques. En effet, dans le cas contraire, on aurait des interactions véhiculées par des Particules virtuelles qui provoqueraient des changements de saveurs.

Des formes génériques du potentiel effectif conduisent aussi à la présence de termes d'interaction trilineaires issues de la brisure de supersymétrie entre particules scalaires :

$$A_\lambda \lambda \phi^3 : A_\lambda \propto m_{\tilde{G}} \equiv m_{3/2}, \quad (3.91)$$

Encore une fois, l'universalité n'a pas de raison fondamentale. Si la théorie supersymétrique inclut aussi des termes d'interaction bilinéaires comme c'est le cas dans l'extension minimale du Modèle Standard à la supersymétrie (MSSM) avec des termes $\mu\phi^2$ où le scalaire en question est le Higgs, on s'attend à trouver aussi des termes $B_\mu\mu\phi^2$ dans le potentiel effectif.

La forme finale du Lagrangien de brisure 'explicite' de la théorie basse énergie de la supergravité suggérée par la brisure spontanée de la supersymétrie locale est :

$$-\frac{1}{2}\Sigma_a m_{1/2a} \tilde{V}_a \tilde{V}_a - \Sigma_i m_{0i}^2 |\phi^i|^2 - (\Sigma_\lambda A_\lambda \lambda \phi^3 + \Sigma_\mu B_\mu \mu \phi^2 + \text{Herm.Conj.}), \quad (3.92)$$

qui contient de nombreux paramètres libres. La brisure de la supersymétrie est explicite dans la théorie basse énergie mais, comme nous l'avons déjà vu, elle est néanmoins douce car la renormalisation des paramètres $m_{1/2a}$, m_{0i} , A_λ et B_μ est logarithmique, sans corrections quadratiques. Il faut souligner que ces paramètres ne sont pas fondamentaux, et que le mécanisme de brisure de la supersymétrie sous-jacent est spontanée.

La renormalisation logarithmique des paramètres signifie que l'on peut calculer leurs valeurs de basse-énergie à partir de leurs valeurs à hautes énergies provenant d'une théorie des supercordes ou de supergravité. Pour le cas de la masse basse-énergie des jauginos M_a , on a :

$$\frac{M_a}{m_{1/2a}} = \frac{\alpha_a}{\alpha_{GUT}} \quad (3.93)$$

à une boucle, où α_a est le couplage de jauge et où l'on a supposé l'unification des couplages à l'échelle de la supergravité.

Pour le cas des scalaires, on a :

$$\frac{\partial m_{0i}^2}{\partial t} = \frac{1}{16\pi^2} [\lambda^2(m_0^2 + A_\lambda^2) - g_a^2 M_a^2] \quad (3.94)$$

avec $t = \ln(Q^2/m_{GUT}^2)$ et où les coefficients liés au groupe de jauge ont été supprimés. Dans le cas des deux premières générations, le premier terme dans la partie droite de l'équation peut être omis, car les couplages de Yukawa sont faibles. On obtient ainsi :

$$m_{0i}^2 = m_0^2 + C_i m_{1/2}^2, \quad (3.95)$$

dans le cas où les masses initiales sont identiques pour les scalaires, et les coefficients C_i sont calculables dans tous les modèles. Le premier terme dans la partie droite de l'équation (3.94) est important pour la troisième génération et pour les bosons de Higgs du MSSM.

En effet, le signe du premier terme est positif et celui du second est négatif. Cela signifie que le dernier terme augmente $m_{0_i}^2$ lorsque l'échelle de renormalisation Q diminue, alors que le terme positif fait diminuer $m_{0_i}^2$ lorsque Q diminue. Dans le cas du boson de Higgs H_u , le terme positif n'est pas négligeable car H_u a un couplage de Yukawa élevé avec le quark top : $\lambda_t \sim g_{2,3}$. Une observation très intéressante est que la brisure de symétrie spontanée électrofaible est explicable. En effet, on retrouve la forme du potentiel de brisure électrofaible de manière naturelle puisque $m_{H_u}^2$ devient négatif à basse énergie. Ainsi, la brisure spontanée de supersymétrie entraîne la brisure spontanée de la symétrie électrofaible. Cela se produit à une échelle d'énergie exponentiellement plus petite que l'échelle de la supergravité :

$$\frac{m_W}{m_P} = \exp\left(\frac{-\mathcal{O}(1)}{\alpha_t}\right) : \quad \alpha_t \equiv \frac{\lambda_t^2}{4\pi}. \quad (3.96)$$

Les calculs d'évolution permettent de démontrer que $m_W \sim 100$ GeV émerge naturellement si $m_t \sim 60$ to 200 GeV, ce qui a été confirmé ensuite par des expériences.

3.7.7 Conclusion sur la brisure de la supersymétrie locale

Comme nous l'avons vu, la brisure de supersymétrie locale serait induite par le mécanisme de super-Higgs. Cependant, le détail du mécanisme de brisure reste un grand mystère. Pour que les sparticules soient plus lourdes que les particules, tout en restant à une masse inférieure à 10 TeV (pour permettre la stabilisation des bosons de Higgs), une méthode consiste à ajouter des champs non présents dans la théorie. On appelle ce secteur, le secteur caché. Dans certains modèles, le secteur caché communique gravitationnellement avec le secteur observable. Dans d'autres modèles, les messagers sont des bosons de jauge. Dans le secteur caché, on suppose l'existence d'une interaction forte qui permet la brisure dynamique de la supersymétrie à une échelle élevée. Dans le cas de l'interaction forte usuelle, le passage de la zone perturbative à la zone non perturbative de la théorie à basse énergie provoque la condensation et le confinement des quarks. Par analogie, on attend un condensat de jauginos [28] dans le secteur caché, ce qui briserait la supersymétrie. Par exemple, dans la théorie des cordes hétérotiques dont le groupe de jauge est $E_8 \times E_8$, le premier groupe exceptionnel contient le modèle standard alors que le second facteur décrit le secteur caché, dans lequel apparaît le condensat de jauginos.

Les théories de cordes donnent naissance à des théories spécifiques de supergravité dites no-scale. Dans ces modèles, la masse du gravitino est indéterminée au niveau de l'arbre car le potentiel effectif est constant. Dans un tel modèle, il n'y a qu'une seule échelle de masse au départ : celle de Planck. La masse du gravitino provient alors des corrections radiatives au potentiel effectif. La forme de ce potentiel au niveau de l'arbre ne fournit pas de termes de masse provenant de la brisure de supersymétrie pour les scalaires. Pourtant, il existe des moyens de communiquer la brisure de la supersymétrie [29] au secteur observable. Par exemple, dans ces théories de "no-scale" supergravité provenant des théories de cordes, il existe souvent un second champ scalaire du secteur caché qui paramétrise la fonction cinétique des bosons de jauge et permet aux jauginos d'obtenir une masse. Les masses des

particules scalaires sont alors données par les corrections radiatives lorsque l'on amène les paramètres de la théorie vers l'échelle électrofaible.

Pour conclure ce paragraphe, il est intéressant de regarder ce que devient l'énergie du vide ou la constante cosmologique après renormalisation. On parle bien évidemment du vide de la théorie supersymétrique sous-jacente. Les corrections à boucle sur l'énergie du vide sont quadratiquement divergentes dans une théorie générique de supergravité, ce qui suggère une contribution à l'énergie du vide de l'ordre de $m_{3/2}^2 m_P^2$ et donc $O(10^{-32})m_P^4$. Cette contribution est supprimée dans certains modèles, qui ont une correction à une boucle de l'ordre de $O(10^{-64})m_P^2$. Pourtant, il faudrait sans doute une symétrie supplémentaire pour amener la constante cosmologique au niveau requis, soit $10^{-123}m_P^4$. Ceci nous conduit maintenant à discuter de la théorie des cordes, qui est notre meilleur candidat pour une Théorie de Tout incluant la gravité.

3.8 Vers une "Théorie de Tout"

3.8.1 Les problèmes de la gravité quantique

Un des éléments fondamentaux qui manquent à notre compréhension de l'Univers et des interactions fondamentales est l'unification des deux grandes théories du XXème siècle : la relativité générale et la mécanique quantique. Ecrire une théorie unifiée est un des enjeux majeurs de notre siècle. La solution du problème de la constante cosmologique devra se situer dans le cadre d'une telle "Théorie de Tout".

La gravitation échappe à la théorie quantique surtout car des infinis incontrôlables et non renormalisables apparaissent lorsque l'on veut calculer des diagrammes contenant des boucles avec des gravitons. Ces corrections sont des puissances qui divergent de plus en plus rapidement lorsqu'on augmente l'ordre du calcul perturbatif, parce que la constante de couplage de la gravitation possède une dimension.

Il existe aussi des problèmes non perturbatifs qui émergent lorsque l'on cherche à quantifier la gravitation. Ces problèmes sont pour la première fois apparus lorsque les physiciens se sont intéressés aux trous noirs. Le trou noir est une solution non perturbative des équations de la Relativité Générale dans laquelle la courbure de l'espace-temps liée aux forces gravitationnelles devient très importante : aucune particule ne peut sortir de l'horizon qui l'entoure. L'existence de cet horizon a des conséquences sur l'entropie et la température des trous noirs. En effet, la masse d'un trou noir est proportionnelle à la surface de son horizon, qui se situe au rayon de Schwarzschild : $r_s = 2\frac{Gm}{c^2}$:

$$S = \frac{1}{4} A. \quad (3.97)$$

où A est la surface et S l'entropie.

Lorsque la masse d'un trou noir augmente, sa surface augmente, et aussi son entropie. Proche de l'horizon du trou noir, les effets quantiques créent des paires de particules, dont une est virtuelle et se trouve à l'intérieur du trou noir tandis que l'autre est réelle et

se trouve à l'extérieur de l'horizon. Cette dernière est rayonnée par le trou noir : c'est que l'on appelle le rayonnement d'Hawking. Cette radiation est stochastique, avec tous les caractéristiques d'une radiation thermique émise par un corps noir. Cet effet est à rapprocher de l'effet Unruh, selon lequel un observateur dans un référentiel accéléré détecte une radiation thermique. Dans le cas d'un trou noir, sa température est liée à sa masse :

$$T = \frac{M}{2\pi}. \quad (3.98)$$

L'entropie du trou noir reflète la perte d'information à travers son horizon, et l'état thermique de la radiation de Hawking, d'une nature stochastique, en est l'expression. Pour la décrire, il faut utiliser un état quantique mixte. Or, on peut imaginer la préparation d'un trou noir à partir d'un état pur. Donc il faut envisager une transition entre un état mixte et un état pur, ce qui n'est pas admis par la mécanique quantique habituelle. On peut voir ce problème déjà au niveau de la radiation de Hawking : considérons un état quantique pur composé de deux particules A, B dans une superposition d'états individuels : $|A, B\rangle \equiv \sum_i c_i |A_i\rangle |B_i\rangle$. Si la particule A tombe dans le trou noir et B s'échappe, l'information tenue par la particule $|A\rangle$ est perdue :

$$\sum_i c_i |A_i B_i\rangle \langle A_i B_i| \rightarrow \sum_i |c_i|^2 |B_i\rangle \langle B_i| \quad (3.99)$$

et B émerge dans un état mixte ! Or, la mécanique quantique ne permet pas l'évolution d'un état pur en état mixte.

Cette discussion met en évidence un conflit entre la théorie quantique et la Relativité Générale. Au moins un de ces deux piliers de la physique du XXème siècle doit être modifié. Les physiciens des particules préfèrent modifier la Relativité Générale en l'élevant à la théorie des cordes [30]. Nous continuons avec cette théorie.

3.8.2 Introduction à la théorie des cordes

Comme nous avons déjà vu, un des problèmes majeurs de la gravité quantique est la présence d'un nombre illimité de divergences. Ces divergences peuvent être reliées à l'absence de cut-off (coupure) à courtes distances dans les théories de champs usuelles où les particules sont ponctuelles. En effet, on peut rapprocher de manière infinie proche des objets ponctuels, donnant ainsi naissance à des interactions infinies :

$$\int^{\Lambda \rightarrow \infty} d^4 k \left(\frac{1}{k^2} \right) \leftrightarrow \int_{1/\Lambda \rightarrow 0} d^4 x \left(\frac{1}{x^6} \right) \sim \Lambda^2 \rightarrow \infty \quad (3.100)$$

On peut adoucir voire effacer ces divergences si l'on impose un cut-off naturel.

Pour faire ceci, il suffit de considérer des objets étendus plutôt que ponctuels pour réduire voire supprimer ces divergences. L'option la plus simple est de remplacer les particules ponctuelles par des objets unidimensionnels : les cordes. Les lignes d'univers associées à ces objets étendus deviennent des surfaces d'Univers (world-sheets). Si les cordes sont

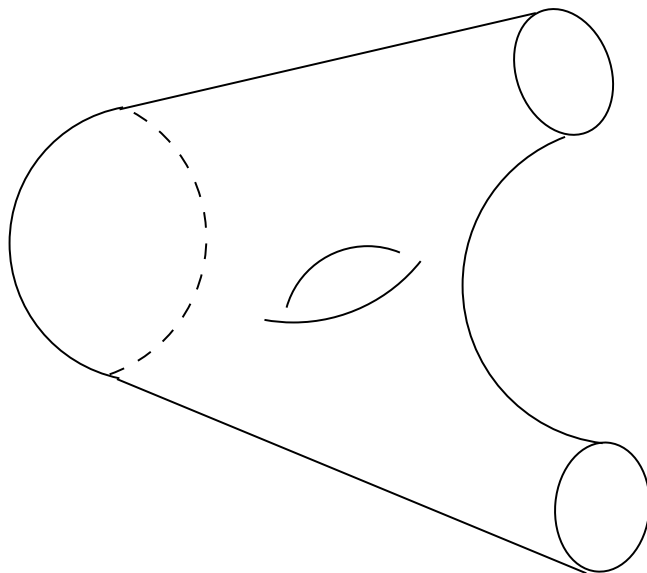


FIG. 3.1 – Une représentation d'une interaction en théorie des cordes.

fermées, on obtient des tubes dans l'espace-temps, qui forment des circuits de plomberie lorsqu'ils interagissent entre eux, comme indique la figure (3.1). On peut imaginer étendre ce principe à des objets avec davantage de dimensions comme des membranes, dont les lignes d'Univers se transforment en "volumes d'Univers". Nous reviendrons à ces objets lorsque nous parlerons des aspects non perturbatifs de la théorie.

Historiquement les théories de cordes furent introduites pour décrire les interactions fortes avant que ne soit développée la QCD. Les états liés l'étaient par l'intermédiaire de cordes possédant une certaine tension. Les amplitudes des processus lors desquels deux particules donnent n particules pouvaient être directement dérivées d'une théorie quantique des cordes. Avec l'avènement de la QCD, la théorie des cordes fut presque oubliée comme théorie des interactions fortes⁹. En plus, il a été reconnu que l'unitarité nécessitait que les cordes fermées soient présentes dans la théorie.

Il apparaissait que le spectre des états quantiques de la corde fermée incluerait une particule de spin-2 et sans masse, ce qui était un inconvénient pour une théorie de l'interaction forte. Pourtant, cela fournit l'idée que les cordes pouvait être une Théorie de Tout : en effet, une particule de spin 2 sans masse peut être interprétée comme un graviton, et dans ce cas la tension de la corde deviendrait beaucoup plus élevée : $\mu = O(m_P^2)$.

Le spectre d'excitation des cordes fournit un nombre infini de différentes particules. Puisque les cordes se propagent sur une surface d'Univers, le formalisme est bidimensionnel. Les vibrations des cordes peuvent être décrites en terme d'ondes qui propagent dans les deux sens autour de la corde fermée, vers la gauche ou vers la droite :

$$\phi(r, t) \rightarrow \phi_L(r - t), \phi_R(r + t) \quad (3.101)$$

⁹Quelques théoriciens continuent à travailler sur ce sujet.

Si la corde est fermée, les ondes gauches et droites sont indépendantes. Après quantification, on peut réécrire la théorie comme une théorie de champs à deux dimensions, car on travaille sur des surfaces d'Univers. Comparée à une théorie à quatre dimensions, il est relativement simple d'obtenir une théorie finie. Dans ce cas, la théorie possède une symétrie conforme qui est décrite par un groupe de symétrie de dimension infinie à deux dimensions. Cette symétrie classique ne doit pas être brisée par des anomalies lorsqu'on rend la théorie quantique. Annuler l'anomalie conforme implique que dans un espace-temps plat les ondes gauches et droites sont toutes les deux équivalentes à 26 bosons si la théorie n'a pas de supersymétrie et à 10 supermultiplets de bosons et fermions si la théorie possède une supersymétrie $N=1$ sur la surface d'Univers.

3.8.3 Les grandes classes de théories de cordes

Parmi les modèles de théories de cordes consistantes, on trouve la *corde bosonique*, une théorie en 26 dimensions qui ne contient pas de fermions. La corde bosonique a un vide instable, c'est-à-dire qu'un espace-temps plat est instable.

On a aussi des modèles de *supercordes* cohérents en 10 dimensions, qui contiennent des fermions et possèdent des vides stables, donc des espaces-temps plats stables, mais n'ayant pas de fermions chiraux.

Le modèle de *corde hétérotique en 10 dimensions* est aussi un modèle supersymétrique, mais il possède en plus du modèle précédent des fermions chiraux, car la violation de la parité a été intégrée puisque les ondes gauches et droites sont traitées différemment. Cette théorie est appelée hétérotique car elle est contruite à partir d'une théorie de supercordes pour la partie fermionique et d'une théorie de cordes bosoniques à 26 dimensions pour la partie bosonique. Les 16 dimensions supplémentaires qui sont autant de degrés de liberté supplémentaires sont perçues comme des champs supplémentaires dans la théorie à 10 dimensions.

Enfin, on peut citer les modèles de *cordes hétérotiques en 4 dimensions* qui sont obtenus en compactifiant les six dimensions supplémentaires à des rayons de l'ordre de la longueur de Planck, ou alors en travaillant directement à 4 dimensions en remplaçant les dimensions manquantes par d'autres degrés de liberté internes comme des fermions ou des groupes de symétrie. De cette manière, il a été possible d'incorporer un groupe de jauge unifié et même des modèles ressemblant au Modèle Standard.

Les théories de supercordes

Comme nous l'avons dit, le modèle de corde bosonique possède beaucoup plus de désavantages que les autres modèles : il a 26 dimensions, pas de fermions et un vide instable ! Les physiciens se sont donc concentrés sur des modèles supersymétriques donc de supercordes. Or, il existe cinq théories de supercordes :

- le type IIA qui se réduit à basse énergie à une supergravité non chirale $N = 2$ à $d = 10$ dimensions ;

- le type IIB qui se réduit à basse énergie à une supergravité chirale $N = 2$ à $d = 10$ dimensions ;
- la théorie hétérotique $E(8) \times E(8)$ qui se réduit à basse énergie à une supergravité $N = 1$ à $d = 10$ couplée à une théorie de Yang-Mills avec le groupe de jauge $E(8) \times E(8)$;
- la théorie hétérotique $SO(32)$ qui se réduit à basse énergie à une supergravité $N = 1$ à $d = 10$ couplée à une théorie de Yang-Mills de groupe de jauge $SO(32)$;
- le type I qui contient à la fois des cordes ouvertes et fermées et qui se réduit à une supergravité $N = 1$ à $d = 10$ couplée à une théorie de Yang-Mills de groupe de jauge $SO(32)$.

Chacune de ces théories est différente de l'autre. La théorie type I est la seule qui contienne à la fois des cordes ouvertes et fermées alors que les autres ne contiennent que des cordes fermées. De plus, la structure de jauge des cinq théories est sensiblement différente dans leur structure à basse énergie. Nous sommes donc en présence de cinq théories qui permettent apparemment de décrire la gravité comme une force quantique et qui sont différentes. Comment comprendre cela ? Existe-t-il un lien entre les différentes théories ?

3.8.4 La structure non-perturbative de la théorie

Dans la construction des théories de cordes, les physiciens ont commencé par travailler sur une théorie de première quantification, c'est-à-dire une théorie où l'on quantifie la position et l'impulsion. Dans cette théorie, les interactions sont introduites à la main et ne peuvent pas dériver d'une seule action. L'unitarité doit être vérifiée pas à pas. La formulation est sur couche de masse. La formulation de la théorie est perturbative.

La théorie de seconde quantification (ou théorie des champs) des cordes quantifie les champs. Les interactions y sont explicites dans l'action, l'unitarité est en principe garantie si le Hamiltonien est hermitien, la théorie peut être formellement écrite perturbativement ou non perturbativement, et la théorie possède une formulation hors couche de masse. Le grand problème de la théorie des champs de cordes est que, bien que sa formulation soit indépendante d'une théorie de perturbation, elle est actuellement trop difficile pour être résolue dans une région non perturbative (forts couplages).

L'idée clé pour sonder et comprendre la structure non perturbative de la théorie est d'utiliser la dualité. La notion de dualité peut être comprise facilement en considérant la théorie du champ magnétique et du champ électrique. Les équations de Maxwell sont invariantes par les transformations de dualité suivantes : l'on change E en $-B$ et B en $-E$ et l'on change e en g , où g est la charge d'un monopole magnétique. Or, dans la théorie quantique $eg = 2\pi n$ où n est un entier. On conclut donc que la théorie du champ électrique défini dans une région à fort couplage (e grand) est équivalente à une théorie du champ magnétique où le couplage est faible (g petit) et vice-versa. On voit sur cet exemple que l'on peut sonder la théorie électrodynamique à fort couplage (donc difficile à résoudre) en étudiant une théorie de monopoles magnétiques à faible couplage.

C'est exactement le même principe que l'on applique aux théories de cordes. Les différentes théories de cordes sont reliées par un réseau de relations de dualité qui permet de comprendre la région non perturbative d'une théorie en utilisant la zone non perturbative

d'une autre théorie. D'autre part, ces relations de dualité laisse supposer qu'une théorie mère gouverne toutes les théories de cordes comme dans le cas de l'électromagnétisme : on a la théorie du champ magnétique reliée à la théorie du champ électrique par dualité, cela implique l'existence d'une théorie regroupant les deux théories : l'électromagnétisme. La théorie mère de ces théories des supercordes est appelée la *M-théorie*. La lettre *M* pourrait avoir le sens de mère, ou peut signifier le mot membrane, ou bien magique ou mystérieuse, et certains y entendent le mot *matrice*, d'après une autre formulation de la théorie.

Mais tout d'abord, citons quelques conséquences de l'existence de la dualité. Des objets étendus de dimension supérieure à un, appelées membranes, apparaissent lorsqu'on étudie des solutions non perturbatives des théories de supercordes, et aussi de supergravité en dimension 10 ou 11. Ce sont des solutions classiques des équations du mouvement : *solitons* qui ont des masses :

$$m \propto \frac{1}{g_s}. \quad (3.102)$$

Il est clair que ces membranes deviennent des états légers lorsqu'on augmente le couplage g_s . On peut, par dualité, étudier le régime de couplage fort de ces objets dans une certaine théorie en étudiant un objet dual dans une autre théorie où le couplage est faible et où les calculs sont (en principe!) faisables puisque perturbatifs.

Parmi ces solitons, solutions non perturbatives des théories de supercordes, on trouve une classe particulière appelée membranes de Dirichlet ou D-membranes : les extrémités de cordes ouvertes y sont rattachées. Un exemple de l'utilisation de ces membranes est le calcul de l'entropie d'un trou noir dont nous avons discuté préalablement. Le trou noir est décrit par une D-membrane sur laquelle sont agglutinées des cordes. On parle d'ailleurs de boules de cordes. Pour calculer l'entropie d'un trou noir, il suffit donc de calculer le nombre d'états de la D-membrane.

La dualité simplifie le calcul. L'existence d'un trou noir implique un couplage fort, mais on peut se ramener au calcul des différents états d'une corde à couplage faible (ce qui est bien connu) et par dualité revenir aux différents états de la membrane à couplage fort. Pour certains types de trous noirs et pour certaines théories de cordes, on retrouve la formule d'entropie macroscopique de Hawking et Bekenstein. Enfin, le paradoxe dont nous parlions à propos de l'état pur qui devient mixte est maintenant réglé. En effet, le système de deux particules A, B qui était dans un état pur et qui semblait évoluer vers un état mixte peut être maintenant perçu comme un état intriqué avec l'état du trou noir. Or, l'état quantique de ce dernier n'est pas facilement accessible physiquement puisque l'on ne peut pas sortir d'informations d'un trou noir.

La M-théorie

Les relations de dualité entre les cinq théories de supercordes impliquent que ces cinq théories ne sont pas autre chose que des solutions différentes d'une seule théorie, la M-théorie. Dans cette approche, les théories de supercordes ne sont rien d'autre que des développements autour des différents vides (un pour chaque théorie) d'une même théorie. La M-théorie vit, quant à elle, dans un espace-temps à 11 dimensions : ce serait la limite

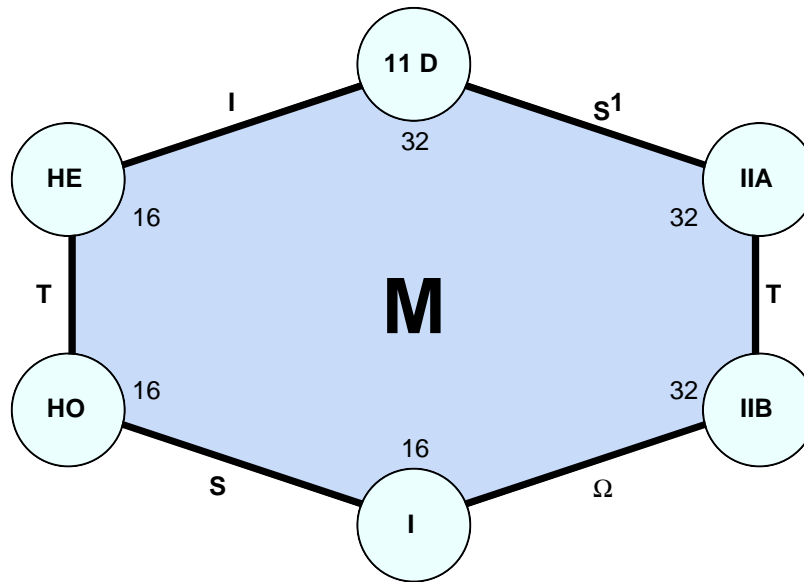


FIG. 3.2 – Les différents vides de la M-théorie reliés par les différentes relations de dualité. Les nombres 16 et 32 sont le nombre de composantes d'un spineur dans la théorie.

à couplage fort de la théorie IIA et de l'hétérotique $E(8) \times E(8)$. En compactifiant la M-théorie sur un cercle on retrouve la théorie type IIA, en la compactifiant sur un cercle divisée par Z_2 , on retrouve la théorie hétérotique $E(8) \times E(8)$. On ne connaît pas l'action de cette M-théorie, mais on sait que la théorie effective aux basses énergies de la M-théorie est la supergravité $d = 11$ avec $N = 1$.

La théorie IIA et la M-théorie sont reliées par la S-dualité qui associe une observable $f(g_s)$ de la théorie IIA à une observable $f'(g_s)$ de la M-théorie de sorte que $f(g_s) = f'(\frac{1}{g_s})$. Le résultat important qui ressort de la S-dualité appliquée à la théorie type IIA est l'existence de la M-théorie en 11 dimensions avec un couplage directement relié à la dimension de la onzième dimension. Ainsi, on obtient :

$$R_{11} = (g_s)^{\frac{2}{3}} \quad (3.103)$$

La onzième dimension n'apparaît visible que dans la limite de couplage fort. C'est la raison pour laquelle cette dimension supplémentaire n'avait pas été perçue avant l'avènement de la dualité : en n'ayant accès qu'au domaine perturbatif, il était impossible de la déceler. Comme la taille de la onzième dimension est liée inversement au couplage, l'unification des couplages est fonction de la taille de cette onzième dimension. Or, il se trouve que pour que les couplages s'unifient, la taille de cette onzième dimension doit être supérieure à celles des six autres dimensions supplémentaires. En compactifiant les six dimensions à une échelle de l'ordre de M_{GUT} donc 10^{16} GeV, on obtient une taille de l'ordre de $(10^{12} \text{ GeV})^{-1}$ à $(10^{13} \text{ GeV})^{-1}$ pour la onzième dimension (appelée R_{11}) pour que l'unification des quatre couplages ait lieu à M_{GUT} . Ainsi, à des énergies comprises entre 10^{12} GeV et 10^{16} GeV, le monde apparaît de dimension cinq. On peut représenter l'étape intermédiaire à cinq

dimensions par deux plateaux de dimensions 4 mais qui, à haute énergie, ont chacun 10 dimensions : les six autres ont été compactifiées. Les deux plateaux ou membranes sont séparées par la onzième dimension.

Dans une autre approche, on unifie d'abord les trois couplages des groupes de jauge à M_{GUT} , et puis le couplage gravitationnel rejoint les trois autres couplages à une échelle d'énergie plus haute M_{11} . Dans ce cas, on trouve que M_{11} est environ deux fois plus grand que M_{GUT} et que R_{11} est de l'ordre de $(10^{14} \text{ GeV})^{-1}$ à $(10^{15} \text{ GeV})^{-1}$.

Un lien peut maintenant être fait avec la brisure de supersymétrie dans un secteur caché : notre monde et tous ses champs sont contraints de rester sur une des deux membranes, et le secteur caché est sur l'autre membrane. Seuls les champs gravitationnels (nous parlons au pluriel car on trouve le graviton, le gravitino et le dilaton) peuvent se propager dans le bulk, c'est-à-dire dans la dimension supplémentaire, et la supersymétrie est brisée dans le secteur caché, c'est-à-dire sur la membrane cachée. La brisure est ensuite transmise au secteur visible par les champs gravitationnels. Ainsi, des mécanismes fondés sur des modèles de supergravité $d = 11$ couplée à une théorie de Yang-Mills avec groupe de jauge $E(8) \times E(8)$ sont proposés pour décrire la brisure de supersymétrie. Le secteur caché correspond à un groupe de jauge $E(8)$ et le secteur visible à l'autre. On peut citer le mécanisme de condensation de jauginos [31] qui brise la supersymétrie dans le secteur caché : lorsqu'on diminue l'énergie et qu'on passe une certaine valeur, une interaction forte du secteur caché fait condenser deux gauginos et brise la supersymétrie.

Nous concluons ce paragraphe par citer ce qu'il reste à accomplir. Le plus grand travail sera d'écrire l'action de la M-théorie et quantifier la théorie. On suppose, à cause de sa théorie basse énergie - la supergravité à 11 dimensions - que la théorie contient des 2-membranes et des 5-membranes qui apparaissent comme des cordes fermées à plus basses dimensions, mais actuellement on ne sait pas quantifier l'action d'une membrane avec les techniques connues. D'autre part, on ne sait pas clairement comment ces membranes interagissent bien que, grâce à la dualité, on puisse donner les excitations des membranes en termes de cordes. La M-théorie ne peut pas dans l'état actuel de son développement prédire la valeur de la constante cosmologique ou expliquer pourquoi la supersymétrie est brisée. Enfin, la M-théorie devra une fois écrite permettre de déterminer l'énergie d'unification sans avoir à ajuster la taille de la onzième dimension : elle devra donc permettre de prédire à la fois la taille de cette dimension mais aussi la valeur de l'énergie d'unification des couplages.

3.8.5 Compactifications, prédictions et limites des théories de supercordes

Une prédiction importante de la théorie perturbative des cordes est la valeur de l'énergie d'unification :

$$M_{GUT} = O(g) \times \frac{m_P}{\sqrt{8\pi}} \simeq \text{few} \times 10^{17} \text{ GeV}. \quad (3.104)$$

Cette valeur est environ 20 fois plus grande que la valeur calculée par une approche qui monte depuis les basses énergies vers les hautes énergies ... Pourtant, il est impressionnant

que l'estimation (3.104) soit si proche d'un calcul qui traverse 14 ordres de grandeur des basses énergies vers les hautes. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, dans la M-theorie, la onzième dimension peut être réglée de manière à ce que tous les couplages s'unifient à 10^{16} GeV. Il est cependant important de constater que deux approches différentes, la théorie quantique des champs et sa renormalisation d'une part et la théorie des cordes d'autre part conduisent, à des valeurs de l'énergie d'unification qui soient si proches.

Parmi les limitations de la théorie des cordes, on trouve le problème de la compactification donc, finalement, le lien avec notre monde à 4 dimensions.

Les moyens de compactifier la théorie, c'est-à-dire, rendre invisibles les dimensions supplémentaires, sont innombrables. On a beaucoup d'options pour retrouver le modèle standard plus d'autres interactions non observées. Comment choisir parmi toutes les possibilités pour compactifier ? Est-ce qu'il faut choisir une variété, ou bien un espace avec une géométrie généralisée, un orbifold, par exemple ? La première option étudiée en détail afin de maintenir la supersymétrie était de compactifier sur une variété de Calabi-Yau. Or, toute compactification sur un espace Calabi-Yau est paramétrisée par les champs de moduli qui décrivent les possibles déformations de ces espaces : *a priori*, les champs de moduli n'ont pas de valeur déterminée.

Cela revient à se poser la question de savoir quel est l'état de vide de la théorie à 4 dimensions. L'énergie du vide à 4 dimensions devrait correspondre à la constante cosmologique. Or, il y a un nombre énorme d'états de vide possibles après compactification à 4 dimensions qui pourraient correspondre à cette énergie : le problème de la dégénérescence du vide reste à résoudre.

La théorie des supercordes est pour le moment dans l'incapacité de prédire l'énergie du vide en distinguant la bonne théorie parmi toutes les possibilités offertes par la compactification. Il est fort probable que cette incapacité à déterminer le juste moyen de compactifier les dimensions supplémentaires soit liée à la méconnaissance de la zone non perturbative de la théorie. En effet, la compactification ne peut pas sortir d'un calcul perturbatif : il s'agit fondamentalement d'un phénomène non perturbatif.

Un autre problème de la théorie des cordes est qu'il s'agit essentiellement d'une théorie de première quantification. Seules l'impulsion et la position sont quantifiées. Il existe une seconde quantification pour les théories de cordes, la théorie des champs de cordes, cependant son utilisation reste très difficile. Il est probable qu'une meilleure connaissance de cette théorie des champs puissent contribuer à une meilleure connaissance du comportement non perturbatif.

3.9 Les dimensions supplémentaires

3.9.1 Pourquoi (pas) des dimensions supplémentaires ?

Les dimensions supplémentaires sont présentes dans les théories de cordes comme nous l'avons vu. Pourtant, l'idée d'un espace-temps à plus de quatre dimensions date des années 1920 : Kaluza et Klein furent les premiers à introduire une dimension supplémentaire dans

le but d'unifier électromagnétisme et gravitation. L'électromagnétisme pouvait s'expliquer géométriquement comme la gravitation si l'on ajoutait une dimension supplémentaire (une ligne et une colonne de plus à la matrice représentant le tenseur métrique). En compactifiant cette dimension, ils montrèrent que l'on retrouvait les lois de l'électromagnétisme telles qu'elles sont dans notre monde à quatre dimensions.

Certains modèles d'extra-dimension proviennent plus ou moins de la M-théorie où deux membranes sont séparées par une dimension supplémentaire. Pourtant, ces théories s'en éloignent plus ou moins fortement. En effet, la M-théorie et sa version basse énergie - la supergravité en dimension 11 couplée à une théorie de Yang-Mills de groupe de jauge $E(8) \times E(8)$ - semble n'autoriser que les champs gravitationnels à se propager dans toutes les dimensions et contraint les autres champs sur une membrane et les champs du secteur caché sur l'autre membrane ; de plus, la dimension de la onzième dimension est déterminée par l'unification des couplages.

Alors que dans les théories de Kaluza et Klein, on peut trouver différentes tailles pour la (ou les) dimension(s) supplémentaire(s), et toutes les variantes possibles pour la localisation des champs, y comprise la propagation des champs de jauge dans des dimensions supplémentaires. Enfin dans ces théories, rien ne force à l'existence de localisation des champs sur une membrane. Il existe des modèles où tous les champs peuvent se propager dans tout l'espace : la notion de membrane disparaît alors : c'est le cas des modèles dits U.E.D pour Universal Extra Dimension. Une particularité de la plupart des modèles est de permettre de résoudre le problème de la hiérarchie sans faire appel à la supersymétrie (tout en introduisant un paramètre supplémentaire c'est-à-dire la taille de l'extra-dimension).

3.9.2 Les différents types de modèles

Il existe de nombreux modèles différents. Les deux classes principales sont celle où la dimension supplémentaire est *plate* et celle où elle est *courbe*.

Dans le premier cas, on trouve des modèles avec dimension supplémentaire plate grande, c'est-à-dire pouvant aller jusqu'à 0.1 mm qui est la limite haute de taille de dimension supplémentaire d'après des expériences de type Cavendish. La taille de la ou des dimensions supplémentaires affecte directement la masse de Planck M_\star dans l'espace à $4 + n$ dimensions :

$$M_p^2 = M_\star^{2+n} R^n, \quad (3.105)$$

où R est la taille de la dimension supplémentaire. Par exemple, dans le cas où $n = 2$ et si l'on se fonde sur une théorie de cordes pour écrire que

$$M_\star^{2+n} = \frac{1}{g_s g_{ym}^2} M_s^{2+n}, \quad (3.106)$$

avec M_s de l'ordre du TeV, on obtient des limites sur la taille des dimensions supplémentaires par la cosmologie qui donnerait $R \leq 10^{-8}$ cm si seule la gravité se propage dans les dimensions supplémentaires. Dans chacun des modèles, on peut choisir d'autoriser certains

champs à se propager dans toutes les dimensions et d'autres à rester localisés sur les membranes.

Le principe de résolution du problème de la hiérarchie est fondée sur l'existence dans l'espace complet d'une valeur de la masse de Planck beaucoup plus petite que dans l'espace à 4 dimensions. On peut ainsi positionner la masse de Planck dans l'espace complet près du TeV et résoudre le problème de la hiérarchie.

Le modèle ADD est un modèle avec dimension(s) supplémentaire(s) plate(s). L'extra-dimension est compacte : c'est un cercle. Les modèles U.E.D ont la même configuration que les modèles A.D.D sauf que tous les champs se propagent dans l'extra-dimension.

Parmi les modèles avec une dimension supplémentaire courbe, citons les modèles de Randall-Sundrum. Les champs du Modèle Standard sont localisés sur une membrane et la gravitation se propage partout. Randall et Sundrum ont montré [9] que l'on pouvait résoudre le problème de hiérarchie entre la masse de Planck et l'échelle électrofaible sans avoir à faire appel à la supersymétrie. Il existe cependant des modèles supersymétriques de ce type [13].

Il existe des versions du modèle de Randall-Sundrum avec deux membranes et avec une membrane. On peut aussi localiser les champs sur les membranes ou bien laisser les champs se propager dans l'extra-dimension. Il existe des modèles où seul le Higgs est localisé.

Tous les modèles d'extra-dimension peuvent donner lieu à des versions supersymétriques, auquel cas la taille de l'extra-dimension peut ne pas être ajustée pour résoudre le problème de la hiérarchie.

Divers aspects ont été étudiés au niveau de la physique des particules comme par exemple l'unification des couplages [32].

3.9.3 Signatures expérimentales

Il est possible de déceler la présence de dimensions supplémentaires à l'échelle du TeV au LHC. Pour cela, il faut bien évidemment que les particules en jeu puissent sentir la présence de la (ou des) dimension(s) supplémentaire(s). Les signatures typiques sont des excitations dites de Kaluza-Klein ; des résonnances dans l'évolution des sections efficaces des réactions en fonction de l'énergie peuvent apparaître. Elles sont dues au "tours" d'excitations de Kaluza-Klein. On peut comprendre ces "tours" en faisant une analogie avec une particule qui rencontre un puit de potentiel en mécanique quantique : son énergie va être quantifiée dans le puit fournissant une tour d'excitations. Dans notre cas, la dimension supplémentaire joue le rôle du puit.

D'autres signatures pourraient être fournies par la création d'un micro trou noir. En effet, tout objet peut se transformer en trou noir s'il est contracté en deça de son rayon de Schwarzschild qui est défini par $2\frac{Gm}{c^2}$. Bien évidemment, plus la masse est grande, plus l'on peut obtenir facilement le rayon de Schwarzschild. Or, comme on l'a vu, les dimensions supplémentaires peuvent augmenter la valeur de G . Donc s'il y a des dimensions supplémentaires de taille suffisante, on peut espérer avec les énergies en jeu au LHC passer en deça du rayon de Schwarzschild et créer des micro trous noirs. Ceux-ci devraient s'évaporer rapidement, puisque le rayonnement de Hawking implique que le trou noir rayonne de

manière inversement proportionnelle à sa masse au carré. Des études par les collaborations ATLAS et CMS ont démontré que ce rayonnement de Hawking serait sans doute visible au LHC.

3.9.4 Des dimensions en moins à haute énergie ?

Tandis que ce n'est pas prévu dans la théorie des cordes, il est possible qu'au moins quelques-unes des dimensions de l'espace-temps paraissent discrètes à hautes énergies. Le principe est d'imposer un cut-off non par la dimension donnée aux particules comme c'est le cas en théorie des cordes, mais par la structure interne de l'espace-temps. Comme dans les théories de champs sur le réseau, le mouvement est décomposé en une succession de bonds d'un point discret de l'espace à un autre. Aux basses énergies, la résolution expérimentale n'est pas suffisante pour détecter ces bonds, et une dimension discrète ressemble à une dimension continue. Pourtant, aux hautes énergies, cette dimension disparaît, et la dimensionalité de l'espace-temps diminue. Il semble que ces modèles de discrétisation de l'espace-temps violent l'invariance de Lorentz dans le cadre de la théorie quantique des champs [33].

3.10 Conclusion

La supersymétrie présente de très jolies caractéristiques. Le LHC devrait permettre de confirmer ou non sa présence près de l'échelle du TeV. Si la supersymétrie existe, on devrait s'attendre à ce qu'une version locale de la symétrie existe : la supergravité.

La supergravité est une théorie qui a suscité beaucoup d'espoir à une époque où l'on pensait pouvoir unir dans son contexte la gravité avec les autres forces. Il se trouve que cette théorie est non renormalisable. Les théories de supercordes permettent de prendre en compte la gravité mais à ce jour elles ne peuvent pas permettre de prédire la valeur de l'énergie du vide. Une multitude de compactifications peuvent fournir la valeur de l'énergie du vide. C'est ce que l'on appelle le Landscape. La méconnaissance de la zone non perturbative de la théorie est peut-être la clé. Pourtant, à ce jour, rien ne nous permet de penser que la nature puisse être décrite par une théorie de cordes. De même, rien ne nous permet de penser que la gravité quantique ou la discrétisation de l'espace-temps soit la solution. Existe-t-il une théorie du Tout ? Probablement. En tout cas, il existe certainement une théorie de gravité quantique. Mais pour reprendre une célèbre phrase : 'la vérité est ailleurs'.

Chapitre 4

Gravitino et Supergravité

4.1 Approche heuristique de la supergravité

Comparé à la supersymétrie globale, une des caractéristiques de la supersymétrie locale est l'apparition d'un champ de jauge associé à la supersymétrie locale : le gravitino. Comme dans le cas des théories de jauge ordinaires, le gravitino couple à un courant de Noether associé à la symétrie et maintient l'invariance sur les transformations locales de SUSY. Nous allons sommairement présenter, sur l'exemple du modèle de Wess-Zumino, l'effet d'une supersymétrie locale. Le Lagrangien de Wess-Zumino ne contient que les termes cinétiques d'un champ scalaire complexe ϕ et d'un fermion chirale χ :

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}} = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* + i \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi. \quad (4.1)$$

A une dérivée totale près, ce lagrangien est invariant sous les transformations globales de supersymétrie suivante :

$$\delta \phi = \sqrt{2} \xi \chi, \quad (4.2)$$

$$\delta \chi = -i \sqrt{2} \sigma^\mu \bar{\xi} (\partial_\mu \phi), \quad (4.3)$$

où ξ est le paramètre infinitésimal de Grassmann.

Si ξ dépend des coordonnées d'espace-temps, le Lagrangien (4.1) n'est pas invariant mais possède des termes proportionnels à $\partial \xi$ et à $\partial \bar{\xi}$. On a :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\text{WZ}} &= \sqrt{2} \{ (\partial_\mu \xi) \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi (\partial_\nu \phi^*) + \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu (\partial_\mu \bar{\xi}) (\partial_\nu \phi) \} + (\text{total derivative}) \\ &\equiv i (\partial_\mu \xi) J^\mu + h.c. + (\text{total derivative}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

où

$$J^\mu \equiv -i \sqrt{2} \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi (\partial_\nu \phi^*). \quad (4.5)$$

J^μ est le courant de Noether associé à la transformation de supersymétrie. On l'appelle le supercourant. Pour préserver l'invariance, on introduit un champ de jauge ψ_μ . Comme

dans le cas des théories de jauge ordinaires, le champ de jauge ψ_μ se couple au courant de Noether :

$$\mathcal{L}_{\psi J} = -\frac{i}{2} G_S \psi_\mu J^\mu + h.c. , \quad (4.6)$$

où G_S est la constante de couplage que nous déterminerons plus tard. Puisque la charge de la supersymétrie a une nature de Grassmann avec un indice de spin, le champ de jauge ψ_μ associé à la supersymétrie est un fermion de spin $\frac{3}{2}$. En faisant varier l'équation (4.6), on obtient :

$$\delta \mathcal{L}_{\psi J} = -\frac{i}{2} G_S \{(\delta \psi_\mu) J^\mu + \psi_\mu (\delta J^\mu)\} + h.c. \quad (4.7)$$

Ainsi, si ψ_μ se transforme comme :

$$\delta \psi_\mu \sim \frac{2}{G_S} \partial_\mu \xi, \quad (4.8)$$

et le premier terme dans l'équation (4.7) s'annule avec la contribution venant de l'équation (4.4).

Considérons à présent le second terme dans l'équation (4.7). Une supertransformation du supercourant (4.5) va donner le tenseur énergie impulsion du multiplet chiral (ϕ, χ) . En effet, étant donné que la charge est donnée par l'intégrale du courant sur une 'surface' et que l'intégrale sur une surface du tenseur énergie impulsion est égale à l'intégrale de volume de la 'divergence' du tenseur énergie impulsion qui est nulle par conservation de l'énergie-impulsion, on peut écrire à partir de l'algèbre :

$$\begin{aligned} \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, J_\alpha^\mu\} &= -2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu T_\nu^\mu + (\text{total derivative}), \\ \{Q^\alpha, \bar{J}^{\mu\dot{\alpha}}\} &= -2\bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\alpha} T_\nu^\mu + (\text{total derivative}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

Où Q et \bar{Q} , sont les générateurs des transformations de supersymétrie. On obtient pour le second terme dans l'équation (4.7) :

$$-\frac{i}{2} G_S \{\psi_\mu (\delta J^\mu)\} + h.c. = \frac{i}{2} G_S \{\psi_\mu \sigma_\nu \bar{\xi} + \psi_\nu \sigma_\mu \bar{\xi} + \bar{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu \xi + \bar{\psi}_\nu \bar{\sigma}_\mu \xi\} T^{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Pour annuler ces termes, on peut réécrire le Lagrangien de Wess-Zumino en faisant apparaître le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}} \rightarrow \sqrt{-g} g_{\mu\nu} (\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi^* + i \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \partial^\nu \chi), \quad (4.11)$$

avec $g = \det g_{\mu\nu}$ et utiliser le fait que la métrique est le champ de jauge associé à la symétrie des translations d'espace-temps. Le courant de Noether associé à cette symétrie

est le tenseur énergie-impulsion. Ainsi, on peut écrire si l'on fait varier le Lagrangien par $g_{\mu\nu}$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \sim 2T^{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

Ainsi, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ (c'est-à-dire le graviton) peut être vu comme le super-partenaire de ψ_μ le gravitino et sa loi de transformation peut être déterminée de sorte que l'invariance de supersymétrie locale soit maintenue :

$$\delta g_{\mu\nu} \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{WZ}}}{\delta g_{\mu\nu}} \sim -\frac{i}{2} G_S \left\{ \psi^\mu \sigma^\nu \bar{\xi} + \psi^\nu \sigma^\mu \bar{\xi} + \bar{\psi}^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi + \bar{\psi}^\nu \bar{\sigma}^\mu \xi \right\} T_{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

En combinant les expressions (4.12) et (4.13), on obtient cette loi de transformation pour le tenseur métrique :

$$\delta g_{\mu\nu} \sim -i G_S \left(\psi_\mu \sigma_\nu \bar{\xi} + \psi_\nu \sigma_\mu \bar{\xi} + \bar{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu \xi + \bar{\psi}_\nu \bar{\sigma}_\mu \xi \right). \quad (4.14)$$

Dans le reste de l'exposé, il sera plus aisé d'utiliser le vierbein e_μ^a plutôt que le tenseur métrique $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$ où $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ est le tenseur métrique en espace-temps plat. En supergravité, le vierbein se transforme :

$$\delta e_\mu^a = -i G_S \left(\xi \sigma^a \bar{\psi}_\mu + \bar{\xi} \bar{\sigma}^a \psi_\mu \right), \quad (4.15)$$

avec $G_S = M^{-1}$ où M est la masse réduite de Planck (voir section suivante). Cette loi de transformation redonne l'équation (4.14). Sous les transformations de supersymétrie locales, le vierbein et le gravitino forme un multiplet (avec quelques champs auxiliaires). Ce multiplet est le multiplet de supergravité.

Comme nous venons de le voir dans ce paragraphe, lorsqu'on étend la supersymétrie globale aux transformations locales, le tenseur métrique apparaît naturellement dans la théorie et donc la gravité. C'est la raison pour laquelle la supersymétrie locale se nomme supergravité.

4.2 Supergravité minimale

Dans la section précédente, nous avons introduit le champ de gravitino dans le but de conserver l'invariance locale de supersymétrie. Comme nous l'avons vu, le gravitino couple au supercourant mais le couplage G_S n'a pas été déterminée. Pour déterminer ce couplage, nous devons vérifier l'invariance par supersymétrie (locale) des termes cinétiques du vierbein e_μ^a et du gravitino ψ_μ .

Dans ce paragraphe, nous allons explicitement vérifié cette invariance dans le modèle minimal de supergravité qui ne contient que le graviton et le gravitino. Nous verrons que le couplage G_S est l'inverse du couplage gravitationnel. Le Lagrangien du modèle est :

$$\mathcal{L}_{\text{MSG}} = \mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_{\text{RS}}, \quad (4.16)$$

où \mathcal{L}_{EH} est le Lagrangien de Einstein-Hilbert et \mathcal{L}_{RS} est le Lagrangien de Rarita-Schwinger qui est essentiellement le terme cinétique d'un spin $\frac{3}{2}$. Le Lagrangien de Einstein-Hilbert est donné par :

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = -\frac{M^2}{2}eR, \quad (4.17)$$

où

$$R \equiv e_a{}^\mu e_b{}^\nu (\partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} - \omega_\mu{}^{ac} \omega_{\nu c}{}^b + \omega_\nu{}^{ac} \omega_{\mu c}{}^b), \quad (4.18)$$

avec $\omega_\mu{}^{ab}$ la connexion de spin et $e \equiv \det e_a{}^\mu$. Le Lagrangien de Rarita-Schwinger peut être écrit :

$$\mathcal{L}_{\text{RS}} = e \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu \tilde{\mathcal{D}}_\rho \psi_\sigma, \quad (4.19)$$

où $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le symbole¹ totalement antisymétrique. La dérivée covariante du champ de gravitino est :

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \psi_\nu \equiv \partial_\mu \psi_\nu + \frac{1}{2} \omega_\mu{}^{ab} \sigma_{ab} \psi_\nu. \quad (4.20)$$

Dans la suite, nous allons voir l'invariance du Lagrangien (4.16) sous les transformations de supersymétries locales,

$$\delta e_\mu{}^a = -iG_S (\xi \sigma^a \bar{\psi}_\mu + \bar{\xi} \bar{\sigma}^a \psi_\mu), \quad (4.21)$$

$$\delta \psi_\mu = \frac{2}{G_S} \tilde{\mathcal{D}}_\mu \xi \equiv \frac{2}{G_S} \left(\partial_\mu \xi + \frac{1}{2} \omega_\mu{}^{ab} \sigma_{ab} \xi \right), \quad (4.22)$$

où le paramètre G_S sera déterminé.

Avant de déterminer l'invariance par supersymétrie du Lagrangien, nous allons faire quelques commentaires sur la connexion de spin $\omega_\mu{}^{ab}$. Comme nous le verrons, cette connexion est une fonction du vierbein $e_\mu{}^a$ et du gravitino ψ_μ ; en effet, lorsqu'on résout les équations du mouvement de $\omega_\mu{}^{ab}$, c'est-à-dire :

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{MSG}}}{\delta \omega_\mu{}^{ab}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{MSG}}}{\partial \omega_\mu{}^{ab}} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{MSG}}}{\partial (\partial_\nu \omega_\mu{}^{ab})} = 0, \quad (4.23)$$

on trouve que :

$$M^2 \{ (\partial_\mu e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^{ab} e_{\nu b}) - (\partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\nu{}^{ab} e_{\mu b}) \} = -\frac{i}{2} (\bar{\psi}_\mu \bar{\sigma}^a \psi_\nu - \bar{\psi}_\nu \bar{\sigma}^a \psi_\mu). \quad (4.24)$$

¹et non tenseur.

ω_μ^{ab} est un champ auxiliaire. En résolvant l'équation (4.24), on obtient une forme explicite de la connexion de spin :

$$\begin{aligned}
\omega_{\mu\rho\sigma} &\equiv e_{\rho a} e_{\sigma b} \omega_\mu^{ab} \\
&= \frac{1}{2} \{ e_{\sigma a} (\partial_\mu e_\rho^a - \partial_\rho e_\mu^a) + e_{\rho a} (\partial_\sigma e_\mu^a - \partial_\mu e_\sigma^a) - e_{\mu a} (\partial_\rho e_\sigma^a - \partial_\sigma e_\rho^a) \} \\
&\quad - \frac{i}{4M^2} e_{\sigma a} (\psi_\rho \sigma^a \bar{\psi}_\mu - \psi_\mu \sigma^a \bar{\psi}_\rho) - \frac{i}{4M^2} e_{\rho a} (\psi_\mu \sigma^a \bar{\psi}_\sigma - \psi_\sigma \sigma^a \bar{\psi}_\mu) \\
&\quad + \frac{i}{4M^2} e_{\mu a} (\psi_\sigma \sigma^a \bar{\psi}_\rho - \psi_\rho \sigma^a \bar{\psi}_\sigma). \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Si l'on fait varier le Lagrangien (4.16) par les transformations de supersymétrie, on trouve :

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_{\text{MSG}} &= \delta e_\mu^a \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{MSG}}}{\delta e_\mu^a} \right|_{\psi, \omega} + \delta \psi_\mu \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{MSG}}}{\delta \psi_\mu} \right|_{e, \omega} \\
&\quad + \left(\delta e_\mu^a \frac{\delta \omega_\mu^{ab}}{\delta e_\mu^a} + \delta \psi_\mu \frac{\delta \omega_\mu^{ab}}{\delta \psi_\mu} \right) \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{MSG}}}{\delta \omega_\mu^{ab}} \right|_{e, \psi}, \tag{4.26}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que la connexion de spin soit fonction du vierbein et du champ de gravitino. Les deux derniers termes de l'équation (4.26) sont proportionnels à $(\delta \mathcal{L}_{\text{MSG}}/\delta \omega)$. Ils s'annulent donc puisque la connexion de spin obéit à ces équations du mouvement $(\delta \mathcal{L}_{\text{MSG}}/\delta \omega) = 0$. Ainsi, il ne reste qu'à faire varier le Lagrangien par rapport à e_μ^a et ψ_μ pour obtenir $\delta \mathcal{L}_{\text{MSG}}$. Nous appelons cette opération Δ .

La variation du Lagrangien de Einstein-hilbert donne (sans trop d'efforts) le tenseur d'Einstein multiplié par δe_μ^a :

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{L}_{\text{EH}} &\equiv \delta e_\mu^a \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{EH}}}{\delta e_\mu^a} \right|_{\psi, \omega} + \delta \psi_\mu \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{EH}}}{\delta \psi_\mu} \right|_{e, \omega} \\
&= iG_S M^2 e \left(R_a^\mu - \frac{1}{2} e_a^\mu R \right) \bar{\psi}_\mu \sigma^a \xi + h.c., \tag{4.27}
\end{aligned}$$

avec

$$R_\mu^a \equiv e_b^\nu (\partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} - \omega_\mu^{ac} \omega_{\nu c}^b + \omega_\nu^{ac} \omega_{\mu c}^b). \tag{4.28}$$

La partie concernant la variation du Lagrangien de Rarita-Schwinger donne :

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{L}_{\text{RS}} &\equiv \delta e_\mu^a \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{RS}}}{\delta e_\mu^a} \right|_{\psi, \omega} + \delta \psi_\mu \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{RS}}}{\delta \psi_\mu} \right|_{e, \omega} \\
&= \left\{ -iG_S, M^2 e \left(R_a^\mu - \frac{1}{2} e_a^\mu R \right) \bar{\psi}_\mu \sigma^a \xi + h.c. \right\} \\
&\quad - e \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \frac{2}{G_S} (\partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^{ab} e_{\nu b}) + iG_S (\bar{\psi}_\mu \bar{\sigma}^a \psi_\nu) \right\} \bar{\xi} \bar{\sigma}_a \tilde{\mathcal{D}}_\rho \psi_\sigma. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Le calcul de la première accolade est long. Il faut en effet se servir des équations (4.24) et (4.25) pour remplacer la dépendance en ψ_μ par des quantités liées au vierbein. En posant $G_S = M^{-1}$, la première ligne dans l'équation (4.29), est égale à $-\Delta\mathcal{L}_{\text{EH}}$, la seconde ligne s'annule par l'équation (4.24). Ainsi, $\delta\mathcal{L}_{\text{MSG}}$ s'annule,

$$\delta\mathcal{L}_{\text{MSG}} = \Delta\mathcal{L}_{\text{EH}} + \Delta\mathcal{L}_{\text{RS}} = 0. \quad (4.30)$$

Il est beaucoup plus aisé de faire cette démonstration au premier ordre dans le couplage en prenant une version linéarisée du Lagrangien d'Einstein-Hilbert.

Nous avons vu l'invariance du Lagrangien de supergravité minimale sous les transformations de supersymétrie avec $G_S = M^{-1}$. Le couplage entre le gravitino et le supercourant n'est pas un paramètre libre mais une constante déterminée pour que les termes cinétiques du supermultiplet (ψ_μ, e_μ^a) soient invariant par supersymétrie locale.

4.3 Le Lagrangien général de supergravité

La dérivation du Lagrangien générale de supergravité est une tâche ardue. Nous allons présenter ici l'expression de ce Lagrangien dont la détermination peut être vue dans cette référence [34]. Dans cette partie, nous prendrons $M = 1$ par simplicité. Nous verrons que pour les études phénoménologiques, seuls les termes d'interaction de dimension 5 sont importants c'est-à-dire essentiellement le couplage du gravitino au supercourant $\mathcal{L}_{\psi J} = -\frac{i}{2M}\psi_\mu J^\mu + h.c.$

Le Lagrangien général de supergravité est essentiellement caractérisé par trois fonctions : le potentiel de Kähler $K(\phi, \phi^*)$, le superpotentiel $W(\phi)$ et la fonction cinétique $f(\phi)$ pour les multiplets vecteurs.

En utilisant ces fonctions, le Lagrangien contenant des champs scalaires ϕ , des fermions chiraux χ , des bosons de jauge A_μ et des fermions de jauge λ mais aussi le vierbein e_μ^a et

le gravitino ψ_μ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{SUGRA}} = & -\frac{1}{2}eR + eg_{ij^*}\tilde{\mathcal{D}}_\mu\phi^i\tilde{\mathcal{D}}^\mu\phi^{*j} - \frac{1}{2}eg^2D_{(a)}D^{(a)} \\
& + ieg_{ij^*}\bar{\chi}^j\bar{\sigma}^\mu\tilde{\mathcal{D}}_\mu\chi^i + e\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}_\nu\tilde{\mathcal{D}}_\rho\psi_\sigma \\
& - \frac{1}{4}ef_{(ab)}^RF_{\mu\nu}^{(a)}F^{\mu\nu(b)} + \frac{1}{8}e\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{(ab)}^IF_{\mu\nu}^{(a)}F_{\rho\sigma}^{(b)} \\
& + \frac{i}{2}e\left[\lambda_{(a)}\sigma^\mu\tilde{\mathcal{D}}_\mu\bar{\lambda}^{(a)} + \bar{\lambda}_{(a)}\bar{\sigma}^\mu\tilde{\mathcal{D}}_\mu\lambda^{(a)}\right] - \frac{1}{2}f_{(ab)}^I\tilde{\mathcal{D}}_\mu\left[e\lambda^{(a)}\sigma^\mu\bar{\lambda}^{(b)}\right] \\
& + \sqrt{2}egg_{ij^*}X_{(a)}^{*j}\chi^i\lambda^{(a)} + \sqrt{2}egg_{ij^*}X_{(a)}^i\bar{\chi}^j\bar{\lambda}^{(a)} \\
& - \frac{i}{4}\sqrt{2}eg\partial_if_{(ab)}D^{(a)}\chi^i\lambda^{(b)} + \frac{i}{4}\sqrt{2}eg\partial_{i^*}f_{(ab)}^*D^{(a)}\bar{\chi}^i\bar{\lambda}^{(b)} \\
& - \frac{1}{4}\sqrt{2}e\partial_if_{(ab)}\chi^i\sigma^{\mu\nu}\lambda^{(a)}F_{\mu\nu}^{(b)} - \frac{1}{4}\sqrt{2}e\partial_{i^*}f_{(ab)}^*\bar{\chi}^i\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\lambda}^{(a)}F_{\mu\nu}^{(b)} \\
& + \frac{1}{2}egD_{(a)}\psi_\mu\sigma^\mu\bar{\lambda}^{(a)} - \frac{1}{2}egD_{(a)}\bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}^\mu\lambda^{(a)} \\
& - \frac{1}{2}\sqrt{2}egg_{ij^*}\tilde{\mathcal{D}}_\nu\phi^{*j}\chi^i\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi_\mu - \frac{1}{2}\sqrt{2}egg_{ij^*}\tilde{\mathcal{D}}_\nu\phi^i\bar{\chi}^j\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\psi}_\mu \\
& - \frac{i}{4}e\left[\psi_\mu\sigma^{\nu\rho}\sigma^\mu\bar{\lambda}_{(a)} + \bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}^{\nu\rho}\bar{\sigma}^\mu\lambda_{(a)}\right]\left[F_{\nu\rho}^{(a)} + \hat{F}_{\nu\rho}^{(a)}\right] \\
& + \frac{1}{4}eg_{ij^*}\left[i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\psi_\mu\sigma_\nu\bar{\psi}_\rho + \psi_\mu\sigma^\sigma\bar{\psi}^\mu\right]\chi^i\sigma_\sigma\bar{\chi}^i \\
& - \frac{1}{8}e\left[g_{ij^*}g_{kl^*} - 2R_{ij^*kl^*}\right]\chi^i\chi^k\bar{\chi}^j\bar{\chi}^l \\
& + \frac{1}{16}e\left[2g_{ij^*}f_{(ab)}^R + f^{R(cd)-1}\partial_if_{(bc)}\partial_{j^*}f_{(ad)}^*\right]\bar{\chi}^j\bar{\sigma}^\mu\chi^i\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\sigma}_\mu\lambda^{(b)} \\
& + \frac{1}{8}e\nabla_i\partial_jf_{(ab)}\chi^i\chi^j\lambda^{(a)}\lambda^{(b)} + \frac{1}{8}e\nabla_{i^*}\partial_{j^*}f_{(ab)}^*\bar{\chi}^i\bar{\chi}^j\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\lambda}^{(b)} \\
& + \frac{1}{16}ef^{R(cd)-1}\partial_if_{(ac)}\partial_jf_{(bd)}\chi^i\lambda^{(a)}\chi^j\lambda^{(b)} \\
& + \frac{1}{16}ef^{R(cd)-1}\partial_{i^*}f_{(ac)}^*\partial_{j^*}f_{(bd)}^*\bar{\chi}^i\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\chi}^j\bar{\lambda}^{(b)} \\
& - \frac{1}{16}eg^{ij^*}\partial_if_{(ab)}\partial_{j^*}f_{(cd)}^*\lambda^{(a)}\lambda^{(b)}\bar{\lambda}^{(c)}\bar{\lambda}^{(d)} \\
& + \frac{3}{16}e\lambda_{(a)}\sigma^\mu\bar{\lambda}^{(a)}\lambda_{(b)}\sigma_\mu\bar{\lambda}^{(b)} \\
& + \frac{i}{4}\sqrt{2}e\partial_if_{(ab)}\left[\chi^i\sigma^{\mu\nu}\lambda^{(a)}\psi_\mu\sigma_\nu\bar{\lambda}^{(b)} - \frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}^\mu\chi^i\lambda^{(a)}\lambda^{(b)}\right] \\
& + \frac{i}{4}\sqrt{2}e\partial_{i^*}f_{(ab)}^*\left[\bar{\chi}^i\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}_\nu\lambda^{(b)} - \frac{1}{4}\psi_\mu\sigma^\mu\bar{\chi}^i\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\lambda}^{(b)}\right] \\
& - ee^{K/2}\{W^*\psi_\mu\sigma^{\mu\nu}\psi_\nu + W\bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}_\nu\} \\
& + \frac{i}{2}\sqrt{2}ee^{K/2}\{D_iW\chi^i\sigma^\mu\bar{\psi}_\mu + D_{i^*}W^*\bar{\chi}^i\bar{\sigma}^\mu\psi_\mu\} \\
& - \frac{1}{2}ee^{K/2}\{\mathcal{D}_iD_jW\chi^i\chi^j + \mathcal{D}_{i^*}D_{j^*}W^*\bar{\chi}^i\bar{\chi}^j\} \\
& + \frac{1}{4}ee^{K/2}g^{ij^*}\left\{D_{j^*}W^*\partial_if_{(ab)}\lambda^{(a)}\lambda^{(b)} + D_iW\partial_{j^*}f_{(ab)}^*\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\lambda}^{(b)}\right\} \\
& - ee^K\left[g^{ij^*}(D_iW)(D_{j^*}W^*) - 3W^*W\right], \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Où $f^R \equiv \text{Re}f$ et $f^I \equiv \text{Im}f$. Les indices i, j, \dots représentent les espèces des multiplets chiraux, et $(a), (b), \dots$ sont les indices pour la représentation adjointe des groupes de jauge (avec le couplage de jauge g et la constante de structure f^{abc} . Ces indices sont élevés ou abaissés avec $f_{(ab)}^R$ et son inverse. Le potentiel de Kähler K et le superpotentiel W dans le Lagrangien (4.31) peuvent être mis sous la forme :

$$G \equiv K + \ln(W^*W). \quad (4.32)$$

Les dérivées covariantes sont :

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi^i \equiv \partial_\mu \phi^i - g A_\mu^{(a)} X_{(a)}^i, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_\mu \chi^i &\equiv \partial_\mu \chi^i + \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \chi^i + \Gamma_{jk}^i \tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi^j \chi^k - g A_\mu^{(a)} \frac{\partial X_{(a)}^i}{\partial \phi^j} \chi^j \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(K_j \tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi^j - K_{j^*} \tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi^{*j} \right) \chi^i - \frac{i}{2} g A_\mu^{(a)} \text{Im} F_{(a)} \chi^i, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_\mu \lambda^{(a)} &\equiv \partial_\mu \lambda^{(a)} + \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \lambda^{(a)} - g f^{abc} A_\mu^{(b)} \lambda^{(c)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(K_j \tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi^j - K_{j^*} \tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi^{*j} \right) \lambda^{(a)} + \frac{i}{2} g A_\mu^{(b)} \text{Im} F_{(b)} \lambda^{(a)}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_\mu \psi_\nu &\equiv \partial_\mu \psi_\nu + \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi_\nu \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(K_j \tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi^j - K_{j^*} \tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi^{*j} \right) \psi_\nu + \frac{i}{2} g A_\mu^{(b)} \text{Im} F_{(b)} \psi_\nu. \end{aligned} \quad (4.36)$$

$F_{\mu\nu}^{(a)}$ est le tenseur de force pour les bosons de jauge $A_\mu^{(a)}$, et $\hat{F}_{\mu\nu}^{(a)}$ est défini par :

$$\hat{F}_{\mu\nu}^{(a)} \equiv F_{\mu\nu}^{(a)} - \frac{i}{2} \left(\psi_\mu \sigma_\nu \bar{\lambda}^{(a)} + \bar{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu \lambda^{(a)} + \psi_\nu \sigma_\mu \bar{\lambda}^{(a)} + \bar{\psi}_\nu \bar{\sigma}_\mu \lambda^{(a)} \right). \quad (4.37)$$

L'opération de différenciation par ϕ^i est symboliquement représentée de la manière suivante :

$$(\dots)_i \equiv \partial_i(\dots) \equiv \frac{\partial(\dots)}{\partial \phi^i}, \quad (\dots)_{i^*} \equiv \partial_{i^*}(\dots) \equiv \frac{\partial(\dots)}{\partial \phi^{*i}}. \quad (4.38)$$

Les dérivées du superpotentiel sont (4.38) :

$$D_i W \equiv W_i + K_i W, \quad (4.39)$$

$$\mathcal{D}_i D_j W \equiv W_{ij} + K_{ij} W + K_i D_j W + K_j D_i W - K_i K_j W - \Gamma_{ij}^k D_k W. \quad (4.40)$$

La métrique de Kähler g_{ij^*} est définie en dérivant le potentiel de Kähler K par les champs scalaires ϕ^i et ϕ^{*j} ;

$$g_{ij^*} \equiv \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^i \partial \phi^{*j}}, \quad (4.41)$$

et g^{ij*} est son inverse,

$$g_{ij*}g^{ik*} = \delta_{j*}^{k*}, \quad g_{ij*}g^{kj*} = \delta_i^k. \quad (4.42)$$

A partir de cette métrique, on peut définir une connection Γ_{ij}^k et tenseur de courbure R_{ij*kl*} :

$$\Gamma_{ij}^k \equiv g^{kl*} \frac{\partial}{\partial \phi^i} g_{jl*}, \quad (4.43)$$

$$R_{ij*kl*} \equiv \frac{\partial}{\partial \phi^i} \frac{\partial}{\partial \phi^{j*}} g_{kl*} - g^{mn*} \left(\frac{\partial}{\partial \phi^{j*}} g_{ml*} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi^i} g_{kn*} \right). \quad (4.44)$$

En utilisant la connection (4.43), la dérivée covariante ∇_i est définie comme :

$$\nabla_i V_j \equiv \frac{\partial}{\partial \phi^i} V_j - \Gamma_{ij}^k V_k. \quad (4.45)$$

(V_i est ici une fonction des champs scalaires.)

Nous allons maintenant expliquer ce que sont $X^{(a)i}$ et $D^{(a)}$. $X^{(a)i}(\phi)$ est le vecteur de Killing associé à g_{ij*} c'est-à-dire, si l'on opère une transformation sur les champs tels que :

$$\phi^i \rightarrow \phi^{i'} = \phi^i + X^{(a)i}(\phi)\epsilon, \quad (4.46)$$

$$\phi^{i*} \rightarrow \phi^{i*'} = \phi^{i*} + X^{*(a)i}(\phi^*)\epsilon, \quad (4.47)$$

(où ϵ est un paramètre infinitésimal), la dérivée de Lie $\delta_X^{(L)}$ de g_{ij*} s'annule ;

$$\begin{aligned} \delta_X^{(L)} g_{\tilde{i}\tilde{j}} &\equiv X^{(a)\tilde{k}} \frac{\partial}{\partial \phi^{\tilde{k}}} g_{\tilde{i}\tilde{j}} + g_{\tilde{i}\tilde{k}} \frac{\partial}{\partial \phi^{\tilde{j}}} X^{(a)\tilde{k}} + g_{\tilde{j}\tilde{k}} \frac{\partial}{\partial \phi^{\tilde{i}}} X^{(a)\tilde{k}} \\ &= \nabla_{\tilde{i}} X_{\tilde{j}}^{(a)} + \nabla_{\tilde{j}} X_{\tilde{i}}^{(a)} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec $X_{\tilde{i}}^{(a)} \equiv g_{\tilde{i}\tilde{j}} X^{(a)\tilde{j}}$, et l'indice \tilde{i} peut représenter à la fois i et i^* . D'après l'équation ci-dessus, nous obtenons deux équations pour les vecteurs de Killing $X^{(a)i}(\phi)$ et $X^{*(a)i}(\phi^*)$;

$$\nabla_i X_j^{(a)} + \nabla_j X_i^{(a)} = 0, \quad (4.49)$$

$$\nabla_i X_{j*}^{(a)} + \nabla_{j*} X_i^{(a)} = 0. \quad (4.50)$$

La première équation est automatiquement satisfaite, tandis que la seconde permet d'écrire $X^{(a)i}(\phi)$ et $X^{*(a)i}(\phi^*)$ comme les dérivées d'une fonction $D^{(a)}$ nommée potentiel de Killing :

$$X^{(a)i}(\phi) = -ig^{ij*} \frac{\partial}{\partial \phi^{j*}} D^{(a)}, \quad (4.51)$$

$$X^{*(a)j}(\phi^*) = ig^{ij*} \frac{\partial}{\partial \phi^i} D^{(a)}. \quad (4.52)$$

En résolvant les équations (4.50), eq.(4.51) et eq.(4.52), les vecteurs de Killing $X^{(a)i}(\phi)$, $X^{*(a)i}(\phi^*)$, et le potentiel $D^{(a)}$ peuvent être obtenus. $F^{(a)}$ qui est une fonction analytique des ϕ^i , est définie comme suit :

$$F^{(a)} \equiv -ig^{ij*} \frac{\partial D^{(a)}}{\partial \phi^{*j}} \frac{\partial K}{\partial \phi^i} + iD^{(a)}. \quad (4.53)$$

Si l'on prend l'exemple du potentiel de Kähler minimal $K^{min} = \phi^i \phi^{*i}$, les vecteurs de Killing et le potentiel prennent les formes suivantes :

$$X^{(a)i}(\phi) = -iT_{ij}^a \phi^j, \quad (4.54)$$

$$X^{*(a)i}(\phi^*) = i\phi^{*j} T_{ji}^a, \quad (4.55)$$

$$D^{(a)} = \phi^{*i} T_{ij}^a \phi^j, \quad (4.56)$$

où T_{ij}^a est un générateur du groupe de jauge.

4.3.1 Les termes d'interactions pertinents du gravitino

Après cette explication des différents éléments du Lagrangien (4.31), nous allons décrire les termes d'interaction pertinents pour une étude phénoménologique. Il s'agit des termes d'interaction du gravitino avec le supercourant.

On ne conserve que les termes d'interaction de dimension 5. Les termes de dimensions supérieures sont négligeables pour notre étude qui se situe à des énergies très faibles devant la masse de Planck. Les termes de dimension 6 par exemple possède la masse de Planck au carré au dénominateur et sont négligeables devant les termes de dimension 5 qui ont la masse de Planck au dénominateur.

D'autre part, certains termes disparaissent par une des équations du mouvement du gravitino qui est sur sa couche de masse puisqu'il n'interviendra dans les diagrammes que comme une particule externe (ou patte externe ou particule libre) et jamais à l'intérieur d'une boucle. Nous verrons dans le paragraphe suivant qui traite du gravitino, ses équations du mouvement ou équations dites de Rarita-Schwinger. L'une d'elles est $\gamma_\mu \psi^\mu = 0$: c'est cette équation qui permet d'éliminer un certain nombre de termes.

Il reste donc l'interaction du gravitino avec le supercourant.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi J} = & -\frac{1}{\sqrt{2}M} eg_{ij*} \tilde{D}_\nu \phi^{*j} \chi^i \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \psi_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}M} eg_{ij*} \tilde{D}_\nu \phi^i \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\psi}_\mu \\ & - \frac{i}{2M} e (\psi_\mu \sigma^{\nu\rho} \sigma^\mu \bar{\lambda}_{(a)} + \bar{\psi}_\mu \bar{\sigma}^{\nu\rho} \bar{\sigma}^\mu \lambda_{(a)}) F_{\nu\rho}^{(a)}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

Il est très important de préciser, à ce stade de l'exposé, puisque nous venons de décrire le Lagrangien complet de supergravité, la physique que nous ferons avec ce Lagrangien et

avec le gravitino. Dans le Lagrangien, il apparaît des termes non renormalisables supprimés par M^{-1} ou par des puissances supérieures. Nous ne pouvons donc pas calculer des effets de boucles en utilisant le lagrangien total de supergravité tout du moins au-delà d'une certaine énergie. De plus à cause de ces termes non renormalisables, l'unitarité de Born est violée à des énergies de l'ordre de M . Ainsi, nous utiliserons la supergravité comme une théorie effective appropriée à des échelles d'énergie très inférieures à l'échelle de Planck et nous ne considérerons que des processus à l'arbre.

4.4 Les théories de cordes et la supergravité

Les théories de supercordes notamment la théorie hétérotique $E_8 \times E_8$ à couplage faible ainsi que la limite à couplage fort, autrement dit, la M-théorie fournissent, des expressions pour les fonctions cinétiques (donc le couplage) et le potentiel de Kähler [28], [35]. Ces expressions sont fonctions des champs de moduli S et T . Il est possible de dériver un modèle de supergravité à quatre dimensions à partir de l'expression du potentiel de Kähler et de calculer les termes soft de brisure pour obtenir finalement le spectre de masse du modèle supersymétrique [35].

4.5 Le gravitino

4.5.1 Notations : rappels

Nous allons commencer par rappeler les notations à quatre composantes pour les fermions. Cela sera utile pour le reste du chapitre.

Les spineurs à quatre composantes ψ peuvent être construits à partir des spineurs à deux composantes ξ and η ;

$$\psi \sim \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} \sim (\eta^\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}). \quad (4.58)$$

Les matrices γ -matrix correspondantes sont des matrices 2×2 σ^μ and $\bar{\sigma}^\mu$;

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Dans cette représentation, on définit les spineurs à quatre composantes pour le gravitino $\psi_\mu^{(M)}$, le jaugino, $\lambda^{(M)}$, et le fermion chiral $\chi_R^{(D)}$ où l'indice M désigne les fermions de Majorana et où D désigne les fermions de Dirac,

$$\psi_\mu^{(M)} \equiv \begin{pmatrix} \psi_\mu \\ \bar{\psi}_\mu \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_\mu^{(M)} \equiv (\psi_\mu, \bar{\psi}_\mu), \quad (4.60)$$

$$\lambda^{(M)} \equiv \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda}^{(M)} \equiv (\lambda, \bar{\lambda}), \quad (4.61)$$

$$\chi_R^{(D)} \equiv \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\chi}_L^{(D)} \equiv (0, \bar{\chi}). \quad (4.62)$$

On remarque que $\psi_\mu^{(M)}$ et $\lambda^{(M)}$ satisfont les conditions de Majorana :

$$\psi_\mu^{(M)} = \psi_\mu^{(M)C} \equiv C \bar{\psi}_\mu^{(M)T}, \quad \lambda^{(M)} = \lambda^{(M)C} \equiv C \bar{\lambda}^{(M)T}, \quad (4.63)$$

où C désigne la matrice conjugué de charge. $\chi_R^{(D)}$ est un fermion chirale avec une chiralité définie ;

$$\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \chi_R^{(D)} = \chi_R^{(D)}, \quad \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \chi_R^{(D)} = 0, \quad (4.64)$$

4.5.2 Les équations de Rarita-Schwinger

Le Lagrangien pour une particule libre massive de spin 3/2 est :

$$\mathcal{L}_{\text{RS}} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \psi_\sigma - \frac{1}{4} m_{3/2} \bar{\psi}_\mu [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi_\nu, \quad (4.65)$$

Ce Lagrangien est une partie du Lagrangien général de supergravité. Il décrit simplement un gravitino libre. Si l'on écrit les équations du mouvement (ou d'Euler-Lagrange) pour le champ $\bar{\psi}_\mu$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\mu} \right) - \partial_\nu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\nu \bar{\psi}_\mu)} \right) \right\} \mathcal{L}_{\text{MRS}} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \psi_\sigma + \frac{1}{2} m_{3/2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi_\nu. \end{aligned} \quad (4.66)$$

En utilisant l'identité :

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \gamma_\mu = -i \gamma_5 (\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma - \gamma^\alpha g^{\beta\gamma} + \gamma^\beta g^{\alpha\gamma} - \gamma^\gamma g^{\alpha\beta}) \quad (4.67)$$

On obtient les équations de Rarita-Schwinger :

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0, \quad (4.68)$$

$$(i \not{\partial} - m_{3/2}) \psi_\mu = 0. \quad (4.69)$$

La fonction d'onde solution des équations précédentes [36] peut être construite en utilisant la fonction d'onde u d'un spin $\frac{1}{2}$ et le vecteur polarisation ϵ_μ d'un spin 1.

Le champ de gravitino est un vecteur de Lorentz à quatre composantes. Chacune des composantes peut être décrite par un spineur de Dirac. On peut le noter :

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_1^\mu \\ \psi_2^\mu \\ \psi_3^\mu \\ \psi_4^\mu \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

L'équation du mouvement pour ce spineur est l'équation de Dirac, c'est l'équation (4.69). La seconde équation de Rarita-Schwinger (4.68) permet de retirer le spin $\frac{1}{2}$ de trop. Nous allons expliquer cette dernière assertion. Comme nous l'avons écrit plus haut, on peut décrire le spin $\frac{3}{2}$ à l'aide d'un spin $\frac{1}{2}$ et d'un spin 1.

La représentation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz décrit un spineur de spin 1. La représentation $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ décrit un spin $\frac{1}{2}$. Le gravitino de spin $\frac{3}{2}$ appartient à la représentation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes ((\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2}))$. Si l'on développe ce produit tensoriel, on trouve :

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes ((\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})) = (1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1) \oplus (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2}) \quad (4.71)$$

On remarque dans cette équation (4.71) qu'il existe toujours une partie décrivant le spin $\frac{1}{2}$. La seconde des équations de Rarita-Schwinger (4.68) permet d'éliminer le spin $\frac{1}{2}$ en trop. En effet $\gamma^\mu \psi_\mu$ est un objet ne se transformant que sous la représentation de Dirac (l'objet ne dépend pas des indices d'espace-temps puisqu'ils sont sommés). Avec l'équation (4.68), on retire donc la contribution de la représentation de Dirac à savoir le terme $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.

Si l'on fait le compte des degrés de liberté du spin $3/2$, on obtient 12. On utilise le fait que pour (j, j') , le nombre de degré de liberté est $(2j+1) + (2j'+1)$.

Pour la partie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de l'équation (4.71), on obtient donc 4 et pour la partie $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, on obtient 4. On obtient donc 4×4 soit 16. Si l'on retire la partie $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ en trop, on obtient donc $16 - 4$ soit 12.

En utilisant les équations (4.68) et (4.69), on obtient une troisième équation :

$$\not{\partial} \psi_\mu = 0 \quad (4.72)$$

Cette dernière équation permet de retirer 4 nouveaux degrés de liberté. Le nombre de degrés de liberté est finalement 8.

4.5.3 Fonction d'onde et somme sur les états de spin

On note $\psi_\mu^l(P)$ les solutions aux équations de Rarita-Schwinger dans l'espace des impulsions avec les indices de spin $l = +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$. On peut construire la fonction d'onde du gravitino à partir du produit des spineurs de Dirac $u^s(P)$, $v^s(P)$ (avec $s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$) et des vecteurs polarisations ϵ_μ^m (avec $m = +1, 0, -1$) des particules massives de spin 1.

On obtient [36] :

$$\psi_\mu^{l+} = \sum_{s,m} C(l, s, m) u^s(P) \epsilon_\mu^m, \quad (4.73)$$

$$\psi_\mu^{l-} = \sum_{s,m} C(l, s, m) v^s(P) \epsilon_\mu^m \quad (4.74)$$

avec $C(l,s,m)$ sont les coefficients de Clebsch-Gordon ; comme le gravitino est une particule de Majorana, sa fonction d'onde conjuguée de charge égale sa fonction d'onde. On peut donc restreindre l'étude aux solutions d'énergie positive ψ_μ^{l+} qui n'implique que $u^s(P)$ et laisser tomber l'indice $+$ de ψ_μ^{l+} .

Les spineurs de Dirac sont normalisés comme suit :

$$\bar{u}^s u^{s'} = 2m \delta^{ss'} \quad (4.75)$$

et les vecteurs polarisations :

$$\epsilon_\mu^m \epsilon^{m' \star \mu} = -\delta^{mm'} \quad (4.76)$$

Ainsi les fonctions d'onde ψ_μ^l sont normalisées comme suit :

$$\bar{\psi}_\mu^l \psi^{l' \mu} = -2m \delta^{ll'} \quad (4.77)$$

La somme $\Pi_{\mu\nu}(P) = \sum_l \psi_\mu^l(P) \bar{\psi}_\nu^l(P)$ des opérateurs de projection sur les 4 hélicités peut être obtenue de la manière suivante. Cette somme doit être une combinaison linéaire des 10 tenseurs suivants [37] pour respecter l'invariance de Lorentz :

$$m g_{\mu\nu}, m \gamma_\mu \gamma_\nu, \gamma_\mu P_\nu, \gamma_\nu P_\mu, \frac{P_\mu P_\nu}{m}, \quad (4.78)$$

$$\not{P} g_{\mu\nu}, \not{P} \gamma_\mu \gamma_\nu, \not{P} \gamma_\mu \frac{P_\nu}{m}, \not{P} \gamma_\nu \frac{P_\mu}{m}, \not{P} \frac{P_\mu P_\nu}{m^2} \quad (4.79)$$

$\Pi_{\mu\nu}(P)$ doit aussi respecter les équation de Rarita-Schwinger

$$\gamma^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0 \quad (4.80)$$

$$(\not{P} - m) \Pi_{\mu\nu}(P) = 0 \quad (4.81)$$

et posséder la propriété des projecteurs :

$$\Pi_\mu^\Lambda(P) \Pi_{\Lambda\mu}(P) = -2m \Pi_{\mu\nu}(P). \quad (4.82)$$

On détermine ainsi de manière unique la combinaison linéaire des termes (4.79) et on obtient :

$$\Pi_{\mu\nu}(P) = -(\not{P} + m) \left[g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{m^2} - \frac{1}{3} \left(g_{\mu\rho} - \frac{P_\mu P_\rho}{m^2} \right) \left(g_{\nu\sigma} - \frac{P_\nu P_\sigma}{m^2} \right) \gamma^\rho \gamma^\sigma \right] \quad (4.83)$$

Nous allons faire quelques commentaires sur cette équation (4.83). Son utilité est bien entendu le calcul des amplitudes au carré des réactions que nous allons considérer. Nous aurons à calculer les 10 réactions -deux donne deux- de production des gravitinos dans le bain thermique ; ces réactions sont les réactions prépondérantes. A partir de ces amplitudes, nous pourrions calculer l'abondance en intégrant l'équation de Boltzmann pour les

gravitinos. Un problème se posera car certaines de ces réactions implique l'échange d'un gluon ou d'un boson de jauge sans masse dans la voie t produisant une divergence infra-rouge. Pour résoudre ce problème nous reprendrons le travail entrepris dans l'article [38].

Revenons à l'équation (4.83). Nous pouvons montrer grâce à cette équation l'équivalence entre le calcul des amplitudes avec un gravitino sans masse et le calcul pour un gravitino de grande masse. Cette assertion peut paraître au premier abord paradoxale. En effet, lorsqu'on se restreint à l'équation (4.83), on constate que faire tendre la masse vers 0 ou vers l'infini induit des termes prépondérants radicalement différents. Il faut cependant se replacer dans le calcul dans son ensemble. Les seules interactions considérées sont celles du gravitino avec le supercourant S_μ . Dans le calcul des amplitudes, il apparaîtra donc une expression de la forme $\Pi_{\mu\nu} S^\mu S^\nu$. Tant que la supersymétrie n'est pas brisée, le supercourant est conservée et le gravitino n'a pas de masse ; le supercourant est conservée donc sa divergence est nulle $\partial_\mu S^\mu = 0$ ou autrement écrit $P_\mu S^\mu = 0$.

Or, on observe que les termes de (4.83) proportionnels à $1/m^2$ sont aussi proportionnels à un terme de la forme $P_\mu P_\nu$, il s'ensuit donc que leur action sur le supercourant donnera une contribution nulle lorsque le gravitino est de masse nulle (ou lorsque la supersymétrie n'est pas brisée). On remarque de même que ces termes tendent vers 0 lorsque le gravitino possède une grande masse. On conclut donc à l'équivalence entre un calcul d'amplitude avec un gravitino de grande masse et un gravitino de masse nulle.

Il reste un terme proportionnel à m qui est soit négligeable par rapport au \not{P} , soit du même ordre de grandeur dans l'extrême limite des calculs que nous ferons. En effet, précisons ce que l'on entend par grande masse : il s'agit d'une masse élevée dans la gamme de masse considérée pour le spectre des particules supersymétriques mais cependant inférieure ou égale, dans le cas extrême, à l'énergie dans le centre de masse qui est de l'ordre de la température du bain thermique après l'Inflation. Dans ce cas extrême qui ne concernera qu'un nombre négligeable de particules, le terme proportionnel à m pourra être négligé étant donné la précision des calculs. Nous pouvons donc dire que les calculs pour un gravitino de masse nulle et de masse élevée sont équivalents.

Avant la brisure de la supersymétrie, le gravitino est sans masse et seules les hélicités $3/2$ et $-3/2$ sont présentes. En effet, comme nous en avons discuté, le gravitino acquiert une masse en absorbant les degrés de liberté du goldstino (spin $1/2$). Ainsi, pour un gravitino de grande masse, les hélicités prépondérantes dans les interactions sont les hélicités $3/2$ et $-3/2$.

On doit encore faire une distinction entre le cas de masse nulle (ou de très grande masse !) dont nous venons de discuter et le cas de faible masse c'est-à-dire de masse plus faible que les différences de masse entre fermions dans les multiplets chiraux et entre bosons dans les multiplets de jauge. Dans ce cas, les hélicités prépondérantes sont les hélicités $1/2$ et $-1/2$ [39]. Le gravitino se comporte comme un goldstino d'après le théorème d'équivalence

[40].

4.5.4 Somme sur les états d'hélicité $\pm 3/2$ pour un gravitino de très grande masse ou de masse nulle

Dans le cas de gravitino de très grande masse, seules les hélicités maximales jouent un rôle dans les interactions. L'hélicité est la projection du spin sur l'axe défini par l'impulsion. Pour des particules massives, ce n'est pas une quantité invariante de Lorentz. Ainsi, il est impossible d'extraire dans un calcul de section efficace la contribution de chaque hélicité de manière invariante de Lorentz. On peut cependant se placer dans le cas de masse nulle. En effet, dans ce cas l'hélicité devient égale à la chiralité qui est une quantité invariante de Lorentz. On peut même isoler dans le calcul les deux états $+3/2$ ou $-3/2$. On peut construire les deux fonctions d'onde ψ_μ^+ et ψ_μ^- . Pour cela, on a besoin de deux spineurs sans masse de Dirac $u^+(P)$ et $u^-(P)$ où P est la quadri-impulsion et des deux vecteurs polarisations ϵ^+ , ϵ^- d'une particule sans masse de spin 1.

Les spineurs de Dirac satisfont l'équation de Dirac :

$$\not{P}u^\pm(P) = 0 \quad (4.84)$$

et sont vecteurs propres de l'opérateur de chiralité :

$$\gamma_5 u^\pm = \pm u^\pm \quad (4.85)$$

Les spineurs sans masse peuvent être normalisés :

$$\bar{u}^s(P)\gamma^\mu u^{s'}(P) = 2P^\mu \delta^{ss'} \quad (4.86)$$

On obtient pour les opérateurs de projection :

$$u^\pm(P)\bar{u}^\pm(P) = (1 \pm \gamma_5)\frac{\not{P}}{2} \quad (4.87)$$

Pour construire les vecteurs de polarisation ϵ_μ^m , on introduit un vecteur n définissant l'axe du temps tel que $n^2 = 1$, et $n^0 > 0$. À partir de cela, on construit une base $(\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \epsilon^{(3)})$. Dans cette base, $\epsilon^{(3)}$ est parallèle à l'impulsion :

$$\epsilon^{(3)} = \frac{1}{n \cdot P}(P - (n \cdot P)n) \quad (4.88)$$

Ensuite, on choisit les vecteurs transverses $\epsilon^{(1)}$ et $\epsilon^{(2)}$. On définit $\epsilon^{(1)}$ tel que $\epsilon^{(1)2} = -1$, $\epsilon^{(1)} \cdot \epsilon^{(3)} = \epsilon^{(1)} \cdot n = 0$. On définit alors $\epsilon^{(2)}$:

$$\epsilon^{(2)\mu} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\gamma} n_\alpha \epsilon_\beta^{(1)} \epsilon_\gamma^{(3)} \quad (4.89)$$

Dans cette base, on peut écrire les vecteurs polarisations d'un spin 1 sans masse :

$$\epsilon^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^{(1)} + i\epsilon^{(2)}) \quad (4.90)$$

$$\epsilon^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^{(1)} - i\epsilon^{(2)}) \quad (4.91)$$

Les fonctions d'onde pour chacune des hélicités (+ et -) s'écrivent :

$$\psi_\mu^\pm(P) = \epsilon_\mu^\pm u^\pm(P) \quad (4.92)$$

ψ_μ^\pm satisfont les équations de Rarita-Schwinger. Les fonctions d'onde sans masse sont normalisées comme suit :

$$\bar{\psi}_\mu^l \gamma^\rho \psi^{\prime\prime\mu} = -2P^\rho \delta^{ll'} \quad (4.93)$$

L'opérateur de projection $\Pi_\mu^{\frac{3}{2}}(P)$ pour une particule sans masse de spin 3/2 est :

$$\begin{aligned} \Pi_\mu^{\frac{3}{2}}(P) &= \sum_l \psi_\mu^l(P) \bar{\psi}_\nu^l(P) = [\epsilon_\mu^+ \epsilon_\nu^{+\star}(1 + \gamma_5) + \epsilon_\mu^- \epsilon_\nu^{-\star}(1 - \gamma_5)] \frac{P}{2} \\ &= \frac{P}{2} [\epsilon_\mu^{(1)} \epsilon_\nu^{(1)} + \epsilon_\mu^{(2)} \epsilon_\nu^{(2)} - i\gamma_5(\epsilon_\mu^{(1)} \epsilon_\nu^{(2)} - \epsilon_\mu^{(2)} \epsilon_\nu^{(1)})] \end{aligned} \quad (4.94)$$

Ce projecteur satisfait les équations de Rarita-Schwinger et possède la propriété de projecteur :

$$\Pi_{\mu\lambda}^{\frac{3}{2}}(P) \gamma_\rho \Pi_\nu^{\frac{3}{2}}(P) = -2P_\rho \Pi_{\mu\nu}^{\frac{3}{2}}(P) \quad (4.95)$$

L'utilisation de cet opérateur de projection dans les calculs d'amplitude donne des résultats dépendants des vecteurs $\epsilon^{(1)}$ et $\epsilon^{(2)}$ pour lesquels nous ne disposons pas d'expressions covariantes. Nous pouvons cependant utiliser un système de coordonnées particuliers pour calculer ces quantités ; par exemple celui où la quadri-impulsion s'écrit :

$$P^\mu = (p, 0, 0, p) \quad (4.96)$$

Si l'on choisit l'axe du temps :

$$n^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (4.97)$$

On obtient :

$$\epsilon^{(3)\mu} = (0, 0, 0, 1), \quad (4.98)$$

et si l'on choisit :

$$\epsilon^{(1)\mu} = (0, 1, 0, 0), \quad (4.99)$$

On obtient pour $\epsilon^{(2)\mu}$:

$$\epsilon^{(2)\mu} = (0, 0, 1, 0) \quad (4.100)$$

On voit ici explicitement dans ce calcul que $P \cdot \epsilon^{(1)} = P \cdot \epsilon^{(2)} = 0$. Nous allons rencontrer des calculs d'amplitude de processus inélastiques $2 \rightarrow 2$:

$$a(P_1) + b(P_2) \rightarrow c(P_3) + d(P) \quad (4.101)$$

Où la particule d produite est un spin 3/2. Dans le référentiel du centre de masse :

$$P_2^\mu = (p, 0, p \sin \alpha, p \cos \alpha) \quad (4.102)$$

$$P_3^\mu = (p, 0, 0, -p) \quad (4.103)$$

$$P_1^\mu = (p, 0, -p \sin \alpha, -p \cos \alpha) \quad (4.104)$$

Dans ce cas, toutes les masses des particules ont été négligées. α est l'angle de diffusion dans le centre de masse et p est l'énergie dans le centre de masse. On peut exprimer α et p en termes des variables de Mandelstam s et t . Ces variables s'écrivent

$$s = (P_1 + P_2)^2 \quad (4.105)$$

$$t = (P_1 - P_3)^2 \quad (4.106)$$

$$u = (P_1 - P)^2 = -s - t \quad (4.107)$$

On trouve que :

$$p = \frac{\sqrt{s}}{2} \quad (4.108)$$

$$\cos \alpha = 2\frac{t}{s} + 1 \quad (4.109)$$

Les quantités que fera apparaître le calcul des amplitudes sont les produits scalaires :

$$P_3 \cdot \epsilon^{(1)} = P_3 \cdot \epsilon^{(2)} = P_2 \cdot \epsilon^{(1)} = 0 \quad (4.110)$$

$$P_2 \cdot \epsilon^{(2)} = -p \sin \alpha \quad (4.111)$$

et les produits pseudoscalaires :

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{2\mu} P_{3\nu} P_{4\rho} \epsilon_{\sigma}^{(1)} = 2p^3 \sin \alpha \quad (4.112)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{2\mu} P_{3\nu} \epsilon_{\rho}^{(1)} \epsilon_{\sigma}^{(2)} = p^2 (1 + \cos \alpha) \quad (4.113)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{2\mu} P_{4\nu} \epsilon_{\rho}^{(1)} \epsilon_{\sigma}^{(2)} = p^2 (\cos \alpha - 1) \quad (4.114)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{3\mu} P_{4\nu} \epsilon_{\rho}^{(1)} \epsilon_{\sigma}^{(2)} = -2p^2 \quad (4.115)$$

4.6 Calcul de l'abondance primordiale de gravitinos

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer le calcul de l'abondance des gravitinos produits dans le bain thermique après l'inflation. Les résultats du chapitre précédent et notamment l'expression des projecteurs nous a été très utile pour le calcul des amplitudes. Nous suivrons la méthode développée par Büchmuller et collaborateurs [38] et les calculs faits par Moroi et collaborateurs [41]. Dans un premier temps nous présenterons le calcul pour un gravitino de masse négligeable devant l'échelle d'énergie puis nous calculerons l'abondance pour des gravitinos de masse quelconque. En effet, le modèle que nous allons développer dans le dernier chapitre et qui correspond à l'article [42] que nous avons publié, est un modèle avec une dimension supplémentaire dans laquelle seul les champs de supergravité se propagent : le modèle ramené à 4 dimensions donne lieu à des modes de Kaluza-Klein pour le graviton et le gravitino et donc, à une tour de particules massives qui peuvent atteindre des masses non négligeables devant l'énergie disponible dans le bain thermique. Il était donc pertinent de calculer l'abondance de chacun de ces modes.

4.6.1 Les équations de Boltzmann

Les interactions du gravitino sont supprimées par l'inverse de la masse de Planck réduite $M = 2.4 \cdot 10^{18}$ GeV et donc le gravitino interagit beaucoup plus faiblement que les particules du MSSM. Quand la température est de l'ordre de M , le gravitino sort de l'équilibre thermique. Bien qu'il soit hors équilibre après l'inflation puisque la température est déjà beaucoup plus basse que l'échelle de Planck, le gravitino est produit par le bain thermique par des processus de collisions inélastiques. Dans l'univers en expansion, l'évolution de la densité de gravitinos est donnée par l'équation de Boltzmann suivante :

$$\frac{dn_{3/2}}{dt} + 3Hn_{3/2} = \langle \sigma_{\text{tot}} v_{\text{rel}} \rangle n_{\text{rad}}^2 = C_G, \quad (4.116)$$

où $\langle \sigma_{\text{tot}} v_{\text{rel}} \rangle$ est la section efficace totale² (fois la vitesse relative) moyennée "thermiquement" (c'est-à-dire en prenant en compte les distributions statistiques des différentes particules en jeu) et $n_{\text{rad}} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3$. C_G correspond au terme de création. Nous voyons que l'équation de Boltzmann est tout bonnement une équation de conservation avec à gauche une dérivée temporelle plus un terme de dilution et à droite un terme de création et normalement un terme de destruction composé par un terme d'annihilation et un terme de désintégration. Ce dernier terme est cependant négligé dans le présent cas de figure car les gravitinos ont un temps de vie très long puisque leur interactions sont gravitationnelles. Le terme d'annihilation est aussi négligeable puis que les gravitinos sont hors équilibre et ne peuvent donc pas voir leur environnement.

En intégrant cette équation (4.116) entre la température la plus élevée de l'époque dominée par la radiation, c'est-à-dire approximativement la température de reheating et une température proche du MeV, on obtient l'abondance primordiale des gravitinos.

On suppose que l'entropie est conservée dans un 'comoving' volume pour des températures plus basses que T_R . On définit une variable :

$$Y_{3/2} \equiv \frac{n_{3/2}}{s}, \quad (4.117)$$

où s est la densité d'entropie

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3, \quad (4.118)$$

où g_{*S} est le nombre effectif de degrés de liberté sans masse. Pour le contenu en particules du MSSM, $g_{*S} = 228.75$ pour des températures beaucoup plus grandes que le spectre des masses du MSSM et $g_{*S} = 43/11$ pour $T \ll m_e$. Comme nous allons le voir, la production de gravitinos devient effective quand $T \sim T_R$. Nous allons montrer que $Y_{3/2}$ devient constant

²de production des gravitinos

pour $T \ll T_R$, si l'entropie totale est conservée c'est d'ailleurs la raison pour laquelle, c'est cette variable que nous utiliserons. En effet, soit N le nombre de gravitinos par comoving volume. Si la production de gravitinos n'est plus effective pour des températures plus basses que T_R , le nombre N de gravitinos se conservent. Ainsi, pour des températures T_1 et T_2 plus faibles que T_R mais plus grandes que la température où le gravitino se désintègre, on a :

$$N = Y(T_1)s(T_1)a^3(T_1) = Y(T_2)s(T_2)a^3(T_2) \quad (4.119)$$

Ceci implique avec $S(T_1) = s(T_1)a^3(T_1)$ et $S(T_2) = s(T_2)a^3(T_2)$, que :

$$\frac{Y(T_1)}{Y(T_2)} = \frac{S(T_2)}{S(T_1)} = \text{Constante} \quad (4.120)$$

Si l'on ré-exprime l'équation (4.116) en fonction de la variable $Y_{3/2}$, on obtient :

$$\frac{d(sY)}{dt} + 3H sY = C_G \quad (4.121)$$

$$s \frac{dY}{dt} + Y \frac{ds}{dt} + 3H sY = C_G \quad (4.122)$$

Or on sait que $a^3 s = \text{cste}$ d'où :

$$s = \frac{\text{cste}}{a^3} \quad (4.123)$$

ce qui implique que :

$$\frac{ds}{dt} = -3 \frac{\dot{a}}{a^4} \text{cste} = -3 \frac{\dot{a}}{a} s \quad (4.124)$$

$$\frac{ds}{dt} = -3sH \quad (4.125)$$

En utilisant cette expression dans l'équation (4.122), on trouve que cette équation s'écrit :

$$s \frac{dY}{dt} = C_G = \langle \sigma_{\text{tot}} v_{\text{rel}} \rangle n_{\text{rad}}^2 \quad (4.126)$$

On peut remplacer la variable temps par la variable température à l'aide de l'équation suivante qui lie temps et température dans un univers dominé par la radiation :

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{90M^2}{N_* \pi^2}} T^{-2}. \quad (4.127)$$

En utilisant aussi la relation suivante :

$$H = \sqrt{\frac{g_* \pi^2}{90M^2}} T^2, \quad (4.128)$$

et le fait que la section efficace de production de gravitino est très faiblement dépendante de la température, on obtient en intégrant l'équation (4.126) entre $T = T_R$ et $T \ll T_R$:

$$Y_{3/2} = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \left[\frac{\langle \sigma_{\text{tot}} v_{\text{rel}} \rangle n_{\text{rad}}}{g_{*S} H} \right]_{T=T_R}. \quad (4.129)$$

Ce résultat est proportionnel à T_R puisque $n_{\text{rad}} \propto T^3$ et $H \propto T^2$. On constate donc que l'abondance primordiale de gravitinos est, à une bonne approximation près, proportionnelle à la température de reheating. Ceci implique que lorsque cette température est trop élevée, l'abondance de gravitinos peut devenir trop importante et problématique pour la nucléosynthèse primordiale [41],[43]. En effet, comme nous le verrons dans les chapitres ultérieurs, le temps de vie du gravitino est suffisamment long pour perturber la nucléosynthèse primordiale. Il faut que sa masse soit supérieure à la dizaine de TeV pour qu'il se désintègre avant le début de la nucléosynthèse.

Il reste maintenant à déterminer C_G (ou $\langle \sigma_{\text{tot}} v_{\text{rel}} \rangle$) pour terminer le calcul de l'abondance.

Pour cela, il nous faut déterminer les amplitudes carré de diffusion de chaque processus de production et donc connaître les règles de Feynman relatives aux interactions du gravitino.

4.6.2 Les interactions du gravitino

On extrait du Lagrangien (4.57) les interactions du gravitino avec le MSSM. On peut écrire ce même Lagrangien après avoir fait agir la métrique de Kähler sur les indices i et j des multiplets chiraux :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi J} = & -\frac{1}{\sqrt{2}M} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^{*i} \bar{\psi}_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \chi_R^i - \frac{1}{\sqrt{2}M} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^i \bar{\chi}_L^i \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_\mu \\ & - \frac{i}{8M} \bar{\psi}_\mu [\gamma^\nu, \gamma^\rho] \gamma^\mu \lambda^{(a)} F_{\nu\rho}^{(a)}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

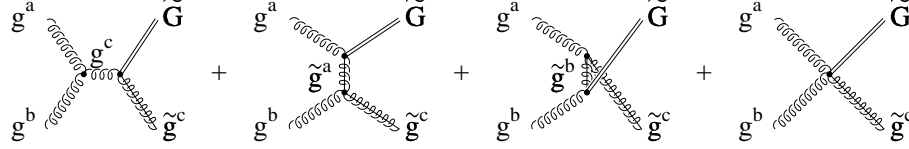
De ce Lagrangien, on extrait les règles de Feynman présentées dans la figure (4.1).

Nous avons utilisé ces règles de Feynman et celles de la Susy-QCD. Nous avons utilisé le formalisme développé dans [44] : les fermions de Majorana (gluinos et gravitinos) possèdent une ligne supplémentaire ajoutée ad-hoc le “flux fermionique” (en anglais : fermion flow) puisqu'ils ne possèdent pas comme les quarks et squarks d'un nombre fermionique qui apparaît dans les diagrammes comme une flèche qui traverse le diagramme de part en part, que l'on peut appeler la ligne fermionique. Le calcul des traces de Dirac se fera dans le sens opposé au “flux fermionique” choisi pour les fermions. Cette méthode permet d'éviter d'utiliser la matrice de conjugaison de charge.

4.6.3 Les processus de production

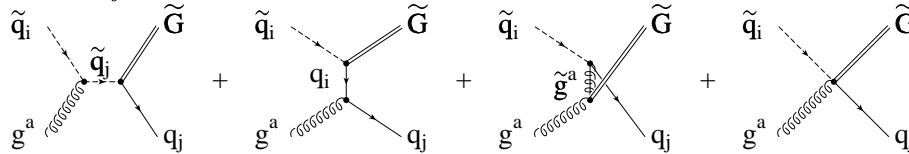
Dans le bain thermique, les gravitinos sont produits par des processus de collisions inélastiques. Dix processus ont été référencés [45]. Les processus prépondérants sont ceux de la QCD car le couplage de l'interaction forte est supérieure aux autres couplages aux énergies considérées. Les processus dues aux autres interactions (faibles et électromagnétiques), qui présentent la même diagrammatique, apportent une correction calculée par Moroi et collaborateurs [43]. Nous présentons ici les dix processus considérés :

- A : $g^a + g^b \rightarrow \tilde{g}^c + \tilde{G}$



- B : $g^a + \tilde{g}^b \rightarrow g^c + \tilde{G}$ (A renversé)

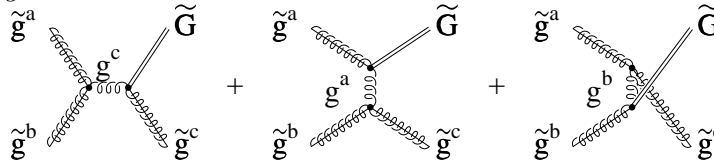
- C : $\tilde{q}_i + g^a \rightarrow \tilde{q}_j + \tilde{G}$



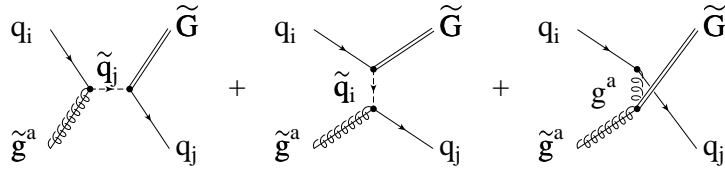
- D : $g^a + q_i \rightarrow \tilde{q}_j + \tilde{G}$ (C renversé)

- E : $\tilde{q}_i + q_j \rightarrow g^a + \tilde{G}$ (C renversé)

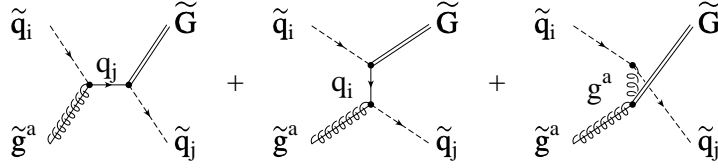
- F : $\tilde{g}^a + \tilde{g}^b \rightarrow \tilde{g}^c + \tilde{G}$



- G : $q_i + \tilde{g}^a \rightarrow q_j + \tilde{G}$



– H : $\tilde{q}_i + \tilde{g}^a \rightarrow \tilde{q}_j + \tilde{G}$



– I : $q_i + \bar{q}_j \rightarrow \tilde{g}^a + \tilde{G}$ (G renversé)

– J : $\tilde{q}_i + \bar{\tilde{q}}_j \rightarrow \tilde{g}^a + \tilde{G}$ (H renversé)

Pour calculer les amplitudes au carré de ces diagrammes de Feynman, nous avons utilisé la formule de projecteur (4.95) présenté dans la section précédente pour les gravitinos très lourds (ou formalisme sans masse). On peut aussi utiliser la formule de projecteur générale (4.83) en prenant pour approximation la limite de haute énergie c'est-à-dire $s \gg m_i^2$ et $\frac{s}{m_i^2} \gg \frac{m_i^2}{m_G^2}$.

Il existe aussi la possibilité d'utiliser le Lagrangien des interactions pour un gravitino léger [46] et d'avoir la formule usuelle pour les projecteur des fermions pour le gravitino puisqu'il se comporte alors comme un goldstino.

Büchmuller et collaborateurs ont remarqué que le résultat donné par le calcul général est la somme des deux cas limites : gravitino lourd et gravitino léger.

Le calcul fait apparaître le facteur :

$$|\mathcal{M}_i|^2 \propto \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{m_{\tilde{g}}^2}{3m_{\tilde{G}}^2} \right) \quad (4.131)$$

Dans ce facteur, la limite donnée par des gravitinos très lourd est donné par le $1/M^2$, la partie donnée par les gravitinos légers est $\frac{1}{M^2}(m_{\tilde{g}}^2/3m_{\tilde{G}}^2)$.

Nous avons calculé les amplitudes en utilisant le logiciel FORM qui permet d'obtenir les traces des matrices γ . Nous avons retrouvé les résultats données par Büchmuller et collaborateurs, ceux du tableau (4.1).

On remarque que quatre de ces sections efficaces différentielles vont présenter une divergence lorsque l'on effectue l'intégrale donnant la section efficace totale. En effet, $\sigma \propto \int_{-s}^0 M^2 dt$. Ces 4 processus sont les processus B, F, G et H. Ils présentent tous des

	processus i	$ \mathcal{M}_i ^2 / \frac{g^2}{M^2} \left(1 + \frac{m_{\tilde{g}}^2}{3m_{\tilde{G}}^2}\right)$
A	$ g^a + g^b \rightarrow \tilde{g}^c + \tilde{G} $	$4(s + 2t + 2\frac{t^2}{s}) f^{abc} ^2$
B	$ g^a + \tilde{g}^b \rightarrow g^c + \tilde{G} $	$-4(t + 2s + 2\frac{s^2}{t}) f^{abc} ^2$
C	$ \tilde{q}_i + g^a \rightarrow q_j + \tilde{G} $	$2s T_{ji}^a ^2$
D	$ g^a + q_i \rightarrow \tilde{q}_j + \tilde{G} $	$-2t T_{ji}^a ^2$
E	$ \tilde{q}_i + q_j \rightarrow g^a + \tilde{G} $	$-2t T_{ji}^a ^2$
F	$ \tilde{g}^a + \tilde{g}^b \rightarrow \tilde{g}^c + \tilde{G} $	$-8\frac{(s^2+st+t^2)^2}{st(s+t)} f^{abc} ^2$
G	$ q_i + \tilde{g}^a \rightarrow q_j + \tilde{G} $	$-4(s + \frac{s^2}{t}) T_{ji}^a ^2$
H	$ \tilde{q}_i + \tilde{g}^a \rightarrow \tilde{q}_j + \tilde{G} $	$-2(t + 2s + 2\frac{s^2}{t}) T_{ji}^a ^2$
I	$ q_i + \bar{q}_j \rightarrow \tilde{g}^a + \tilde{G} $	$-4(t + \frac{t^2}{s}) T_{ji}^a ^2$
J	$ \tilde{q}_i + \bar{\tilde{q}}_j \rightarrow \tilde{g}^a + \tilde{G} $	$2(s + 2t + 2\frac{t^2}{s}) T_{ji}^a ^2$

TAB. 4.1 – *Eléments de matrices au carré pour la production de gravitinos (\tilde{G}) par des processus $2 \rightarrow 2$ avec des quarks (q_i) gauches, des squarks (\tilde{q}_i), gluons (g^a) et des gluinos (\tilde{g}^a). Les valeurs sont données pour un choix particulier de couleur et ont été sommées sur les états de spins initiaux et finaux. f^{abc} and T_{ji}^a sont les constantes de structure usuelles pour $SU(3)$.*

divergences infra-rouges dues à l'échange d'un gluon sans masse dans la voie t (ou u). Leurs amplitudes M sont proportionnelles à $1/t$ qui fait diverger l'intégrale en 0.

On peut partiellement résoudre le problème en donnant une masse thermique au gluon ou en introduisant une coupure (cut-off) angulaire [45],[47]. La partie singulière logarithmique concorde quelque soit la méthode choisie mais la résolution est partielle car la partie finie du résultat dépend de la méthode de cut-off choisie.

4.6.4 Le calcul par la méthode des “hard thermal loop resummation”

Principe

Pour résoudre ce problème, Büchmüller et collaborateurs [38] utilisent une méthode dite ‘hard loop thermal resummation’, une méthode utilisée par [48] dans le cas de l’axion dans un plasma QED. Le taux de production est définie au moyen de la partie imaginaire de la self énergie du gravitino. C’est en quelque sorte le théorème optique. Les contributions à la self-énergie sont divisées en deux parties au moyen d’une valeur de coupure k_{cut} sur les impulsions : la partie dite ‘soft’ pour les boucles d’impulsion plus faible que k_{cut} et la partie dite ‘hard’ pour les boucles d’impulsion plus grande que k_{cut} . La somme des deux contributions élimine les termes dépendants de la coupure k_{cut} . Pour que l’élimination des termes ait lieu, k_{cut} est mis à 0 dans les processus non divergents de la partie ‘hard’.

Pour la partie soft, une masse thermique est donnée au gluon [49] et on calcule la self-énergie de laquelle on tire le taux de production soft.

Pour la partie hard, le calcul se fait à partir des processus $2 \rightarrow 2$ avec la coupure k_{cut} sur les impulsions. Dans la partie hard, on n’a bien évidemment plus besoin de masse thermique pour le gluon puisque l’impulsion est au-delà de k_{cut} et donc il n’y a pas de divergence puisqu’on n’intègre plus à partir de 0.

Le terme de création de l’équation de Boltzmann que l’on désire calculer est donné par :

$$C_G(T) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_F(E) (\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}}(E) + \Gamma_{\tilde{G}}^{\text{hard}}(E)) \quad (4.132)$$

où E est l’énergie du gravitino et p son impulsion. $\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}}$ et $\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{hard}}$ sont respectivement les taux de production soft et hard ; $n_F(E)$ est la distribution de Fermi (pour le gravitino). On peut réécrire cette équation en remplaçant d^3p par $4\pi E^2 dE$. En effet, $E = p$ puisque les masses des particules sont négligées par rapport à l’échelle d’énergie.

Partie soft

Concernant la partie soft, le diagramme principal est celui de la figure (4.2). Le gluon possède une masse dite thermique. En effet, son propagateur est redéfini en incluant les corrections dues aux boucles thermiques : ses corrections peuvent être vues comme un terme de masse. C’est ce que l’on désigne par le terme ‘masse thermique’.

On aurait pu aussi considérer une boucle de quark-squark mais ce diagramme est négligeable par rapport au précédent. En effet, dans le formalisme du gravitino léger [46], l’interaction quark-squark-gravitino est proportionnelle à m_q^2 alors que l’interaction gluon-gluino-gravitino est proportionnelle à $m_{\tilde{g}}$. Or, $m_{\tilde{q}}, m_{\tilde{g}} \ll T$ puisque l’on se place à très haute énergie : les termes $m_{\tilde{q}}^2/T^2$ sont donc négligeables par rapport aux termes $m_{\tilde{g}}/T$.

Büchmuller et collaborateurs donnent l'expression suivante pour $\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}}(E)$

$$\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}}(E) = \frac{(N^2 - 1)m_{\tilde{g}}^2 m_g^2 T}{4\pi M^2 m_{\tilde{G}}^2} \left[\ln \left(\frac{k_{\text{cut}}^2}{m_g^2} \right) - 1.379 \right]. \quad (4.133)$$

Il faut cependant modifier cette expression lorsqu'on la sommera à $\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{hard}}$ pour tenir compte de l'hélicité 3/2 du gravitino. En effet, la présente expression (4.133) a été calculée dans le formalisme du gravitino léger : cette expression est donc proportionnelle à $\frac{1}{M^2}(m_{\tilde{g}}^2/3m_{\tilde{G}}^2)$. L'expression complète de $\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}}$ est donc donnée par l'équation [38] :

$$\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}}(E) = \left(1 + \frac{m_{\tilde{g}}^2}{3m_{\tilde{G}}^2}\right) 3 \frac{(N^2 - 1)m_g^2 T}{4\pi M^2} \left[\ln \left(\frac{k_{\text{cut}}^2}{m_g^2} \right) - 1.379 \right]. \quad (4.134)$$

Dans cette équation, m_g est la masse thermique du gluon :

$$m_g^2 = \frac{g^2 T^2}{6} (N + n_f). \quad (4.135)$$

avec n_f le nombre de saveurs (c'est-à-dire 6) et N le nombre de couleurs (ou l'indice N du groupe $SU(N)$, donc 3 pour $SU(3)$).

Partie 'Hard'

L'expression de $\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{hard}}$ est plus complexe [38]. Il nous faut donner d'abord quelques définitions pour les notations. Les quadri-impulsions P_1, P_2, P_3 et P correspondent aux particules dans l'ordre dans lequel elles ont été écrites dans le tableau (4.1) avec $s = (P_1 + P_2)^2$ et $t = (P_1 - P_3)^2$. On différenciera trois classes de processus suivant le nombre de fermions et de bosons dans les états initiaux et finaux. On notera ces processus : BBF, BFB, et FFF. On définit les produits des distributions statistiques, n_{FFF} , n_{BBF} et n_{BFB} :

$$n_{BBF} = n_B(E_1)n_B(E_2)(1 - n_F(E_3)) \quad (4.136)$$

$$n_{FFF} = n_F(E_1)n_F(E_2)(1 - n_F(E_3)) \quad (4.137)$$

$$n_{BFB} = n_B(E_1)n_F(E_2)(1 - n_B(E_3)) \quad (4.138)$$

où n_B et n_F sont respectivement les distributions de Bose et de Fermi. Le taux de production hard obtenu par [38] à par tir des processus $2 \rightarrow 2$ est :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{hard}}(E) = & \left(1 + \frac{m_{\tilde{g}}^2}{3m_{\tilde{G}}^2}\right) \frac{g^2(N^2 - 1)}{8\pi^3 M^2} \left\{ 2\pi^2(N + n_f)T^3 \left(\ln\left(\frac{2T}{k_{\text{cut}}}\right) + \frac{17}{6} - \gamma + \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right. \\
& + (N + n_f) (e^{E/T} + 1) \int_0^\infty dE_3 \int_0^{E+E_3} dE_1 \ln\left(\frac{|E_1 - E_3|}{E_3}\right) \\
& \times \left[\Theta(E - E_1) \frac{d}{dE_1} \left[(n_{BFB} + n_{FFF}) \left(\frac{E_1^2 E_2^2}{E^2} - E_3^2 \right) \right] \right. \\
& - \Theta(E_1 - E_3) \frac{d}{dE_1} \left[(n_{BFB} + n_{FFF}) \frac{E_2^2}{E^2} (E_1^2 + E_3^2) \right] \\
& \left. \left. + \Theta(E_3 - E_1) \frac{d}{dE_1} \left[(n_{BFB} + n_{FFF}) (E_1^2 + E_3^2) \right] \right] \right. \\
& \left. + I_{BBF} + I_{BFB} + I_{FFF} \right\}. \tag{4.139}
\end{aligned}$$

Les parties I_{BBF} , I_{FFF} et I_{BFB} ne comportent pas de partie divergente. Dans leurs expressions intégrales, le cut-off, k_{cut} , est pris nul. Ceci permet, entre autres, la compensation entre les parties soft et hard, compensation qui ne pourrait se faire si on laissait des dépendances en k_{cut} sur les parties non divergentes. Nous donnons ci-dessous les expressions de ces parties :

$$I_{BBF} = 32\pi^3 (e^{E/T} + 1) \left[(N + n_f) I_{BBF}^{t^2/s} - 2n_f I_{BBF}^t \right], \tag{4.140}$$

$$I_{BFB} = T^3(N + n_f) \left[\text{Li}_2(-e^{-E/T}) - \frac{\pi^2}{6}(1 + 8 \ln(2)) \right] - 64\pi^3 n_f (e^{E/T} + 1) I_{BFB}^t, \tag{4.141}$$

$$I_{FFF} = -32\pi^3 (e^{E/T} + 1) (N + n_f) I_{FFF}^{t^2/s}. \tag{4.142}$$

avec :

$$\begin{aligned}
I_{BBF(BFB)}^t = & \frac{1}{96\pi^3} \int_0^\infty dE_3 \int_0^{E+E_3} dE_1 n_{BBF(BFB)} \\
& \times \left\{ \Theta(E - E_1) \frac{E - E_1}{E^2} [2E^2 + (3E_3 - E_1)(E + E_1)] \right. \\
& - \Theta(E_1 - E_3) \frac{E_2^2}{E^2} (2E - E_3 + E_1) \\
& \left. + \Theta(E_3 - E_1) (-3E_3 + 3E_1 - 2E) \right\}, \tag{4.143}
\end{aligned}$$

et

$$I_{BBF(FFF)}^{t^2/s} = \frac{1}{32\pi^3} \int_0^\infty dE_3 \int_0^{E+E_3} dE_2 n_{BBF(FFF)} \times \left\{ \frac{E_2^2}{E+E_3} + \Theta(E_2 - E_3) \frac{E_3 - E_2}{E^2} [E_3(E_3 - E_2) + E(E_3 + E_2)] \right\} \quad (4.144)$$

Si l'on regroupe toutes les parties du calcul, on trouve pour la partie hard du terme de collision :

$$\begin{aligned} C_G^{\text{hard}}(T) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_F(E) \Gamma_{\tilde{G}}^{\text{hard}}(E) \\ &= \left(1 + \frac{m_g^2}{3m_{\tilde{G}}^2} \right) \frac{3\zeta(3)g^2(N^2 - 1)T^6}{32\pi^3 M^2} \\ &\times \left\{ (N + n_f) \left[\ln \left(\frac{T^2}{k_{\text{cut}}^2} \right) + 1.7014 \right] + 0.5781n_f \right\}, \end{aligned} \quad (4.145)$$

La vérification numérique de cette partie du calcul est longue et laborieuse. Dans les calculs, on a remplacé d^3p par $4\pi E^2 dE$.

Regroupement hard + soft

Pour la partie soft, on trouve à partir de l'équation (4.134)

$$\begin{aligned} C_G^{\text{soft}}(T) &= \int 4\pi E^2 \frac{dE}{(2\pi)^3} n_F(E) \Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}} \\ &= \Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}} \int 4\pi E^2 \frac{dE}{(2\pi)^3} n_F(E) \\ &= \frac{3}{2} \zeta(3) \frac{1}{2\pi^2} T^3 \Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}} \end{aligned} \quad (4.146)$$

car $\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}}$ est indépendant de E .

Si l'on regroupe tous les termes, (4.145) et (4.146), dans l'équation (4.150) pour avoir le terme de collision totale, on trouve :

$$\begin{aligned}
C_{\tilde{G}}(T) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_F(E) (\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}}(E) + \Gamma_{\tilde{G}}^{\text{hard}}(E)) \\
&= \left(1 + \frac{m_{\tilde{g}}^2}{3m_{\tilde{G}}^2}\right) \frac{3\zeta(3)g^2(N^2 - 1)T^6}{32\pi^3 M^2} \\
&\quad \left\{ \left[\ln\left(\frac{T^2}{m_{\tilde{g}}^2}\right) + 0.3224 \right] (N + n_f) + 0.5781n_f \right\}. \quad (4.147)
\end{aligned}$$

La dépendance en k_{kut} disparaît.

4.6.5 Résultat pour l'abondance

On peut maintenant obtenir le résultat final pour l'abondance (4.129). On peut écrire l'équation (4.147) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{\text{tot}} v_{\text{rel}} \rangle &= \left[1 + \left(\frac{m_{\tilde{g}}^2}{3m_{3/2}^2} \right) \right] \frac{3g^2(N^2 - 1)}{32\pi M_*^2} \\
&\quad \times \frac{\pi^2}{\zeta(3)} \left\{ \left[\ln(T^2/m_{g,\text{th}}^2) + 0.3224 \right] (N + n_f) + 0.5781n_f \right\}, \quad (4.148)
\end{aligned}$$

et remplacer dans l'équation (4.129) pour obtenir l'abondance.

Moroi et collaborateurs ont fait le calcul en prenant en compte les trois groupes de jauge³, ils ont ensuite pris en compte l'évolution des couplages à partir de 10^{10} GeV et une production pendant l'inflation. Le résultat fourni est donné pour des masses de jauginos très faibles devant celles du gravitino. Dans le modèle que nous regarderons, ce sera toujours le cas.

L'abondance finale est donnée [41] par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
Y_{3/2} &\simeq 1.9 \times 10^{-12} \\
&\quad \times \left(\frac{T_R}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \left[1 + 0.045 \ln \left(\frac{T_R}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \right] \left[1 - 0.028 \ln \left(\frac{T_R}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \right]. \quad (4.149)
\end{aligned}$$

³bien que $SU(3)$ soit le groupe de jauge dominant dans la gamme d'énergie considérée

4.6.6 Calcul de l'abondance pour des masses de gravitino non négligeables par rapport à l'échelle d'énergie

Dans les calculs précédents, la masse du gravitino a toujours été négligée aux bornes des intégrales permettant le calcul du terme de collision. De plus, dans le calcul de ces intégrales, la relation : $E = p$ était toujours appliquée. Dans le chapitre suivant, nous allons étudier un modèle où les gravitinos ont des excitations de Kaluza-Klein et où la masse de ces excitations peut éventuellement atteindre l'échelle d'énergie du bain thermique. Intuitivement, on comprend bien que si l'énergie disponible dans le bain thermique n'est pas suffisante, on ne pourra pas créer une particule de masse supérieure à l'énergie moyenne du bain thermique.

Nous avons calculé numériquement l'évolution de l'abondance en fonction de la masse pour pouvoir définir une masse à partir de laquelle le plasma primordiale ne peut plus produire le gravitino de Kaluza-Klein. Nous avons repris les intégrales du paragraphe précédent en incluant une masse pour le gravitino. Dans ce cas-là, on a un facteur de 'coupure' $\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}}$ dans les intégrales. Le principe est de re-calculer le terme de création et d'intégrer à nouveau l'équation de Boltzmann en prenant en compte les corrections de masse dans les intégrales. Si l'on reprend le calcul de l'intégrale donnant C_G , on obtient :

$$C_G(T) = \int_m \frac{4\pi}{(2\pi)^3} E^2 \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} n_F(E) (\Gamma_{\tilde{G}}^{\text{soft}}(E) + \Gamma_{\tilde{G}}^{\text{hard}}(E)) \quad (4.150)$$

Nous avons évalué numériquement cette intégrale pour différentes valeurs de m . En pratique, nous avons utiliser la variable $x = m/T$ dans les calculs. A partir de la liste de valeurs numériques, nous avons déterminer une fonction de x interpolant les valeurs numériques. Puis nous avons intégré l'équation de Boltzmann (4.126) pour retrouver l'abondance. Le résultat est la courbe (4.3) ci-dessous. Cette courbe nous permet de comparer l'abondance pour une masse quelconque, à l'abondance pour une masse négligeable par rapport à l'énergie moyenne du bain thermique.

Sur cette figure, nous avons aussi représenté la coupure que nous allons faire. Il s'agit de la fonction de heavyside $\theta(1 - x)$. En effet, nous constatons que pour $m = T_R$, l'abondance $Y(m) = 0.458 Y_0$ et l'allure de la courbe nous permet de penser que l'on peut approximer le comportement exact par la coupure suivante :

$$\begin{aligned} Y_{3/2}^k &= Y_{3/2}^0, \quad \text{for } M^k \leq T_R \quad \text{and} \\ Y_{3/2}^k &= 0, \quad \text{for } M^k > T_R \end{aligned} \quad (4.151)$$

où k représente l'indice de Kaluza-Klein, M^k est la masse du k^{me} mode de gravitino et $Y_{3/2}^k$ son abondance. $Y_{3/2}^0$ est l'abondance donnée par l'équation (4.149). L'approximation faite nous permettra une manipulation simple sans trop perdre d'informations. Elle correspond à l'approximation intuitive qu'un mode de masse supérieure à T_R

ne peut pas être créée.

Cette dernière équation nous amène vers le chapitre suivant dans lequel nous allons définir le modèle de dimension supplémentaire utilisé et les conclusions que nous pouvons tirer de ce modèle.

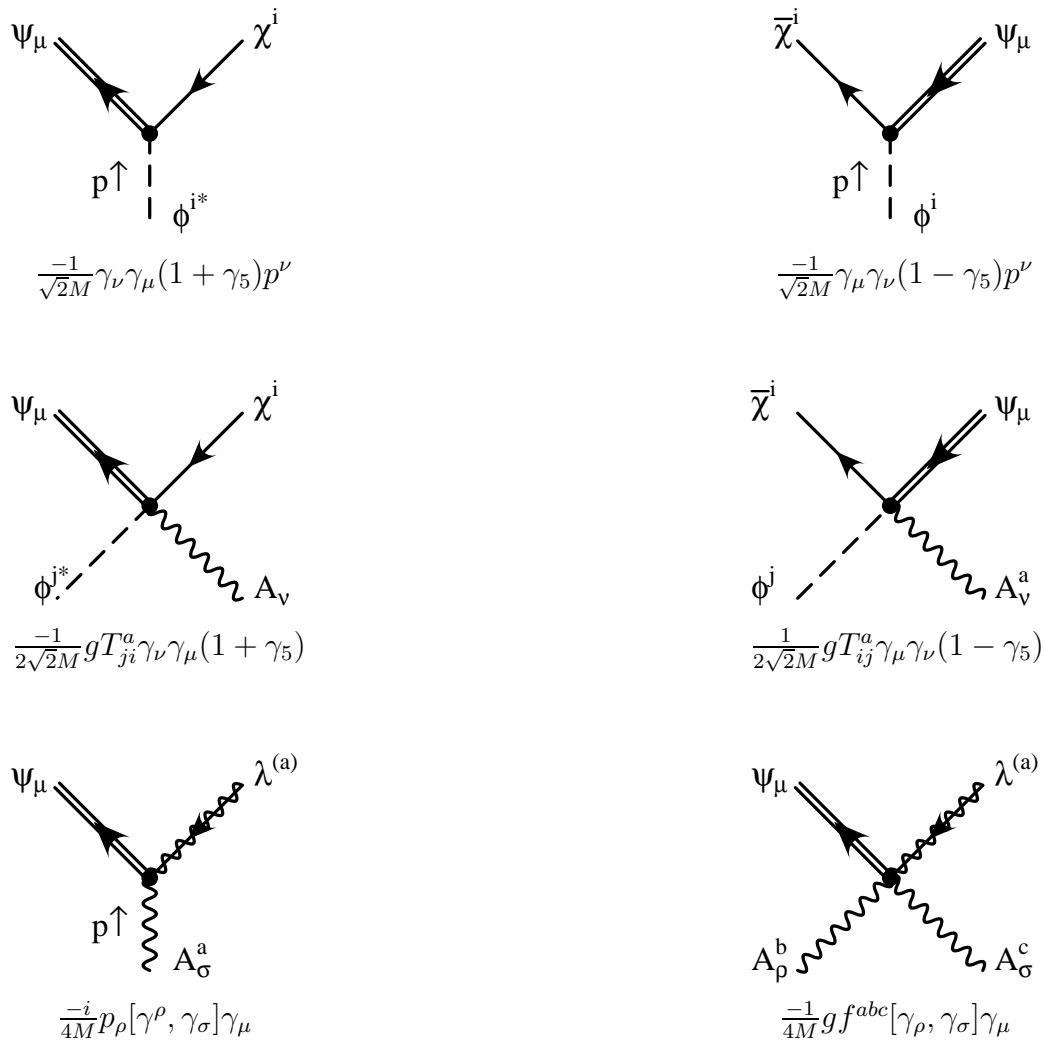


FIG. 4.1 – Règles de Feynman pour les interactions du gravitino.

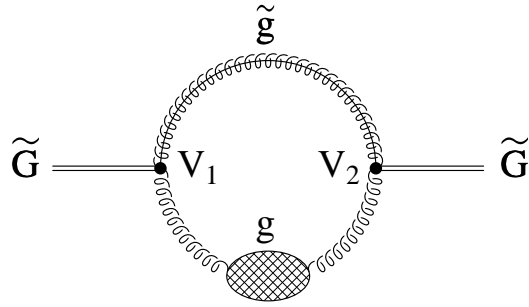


FIG. 4.2 – *Boucle Gluon-gluino. Contribution principale à la self-energie du gravitino ; le blob sur la ligne du gluon représente le propagateur re-sommé du gluon en tenant compte des effets thermiques.*

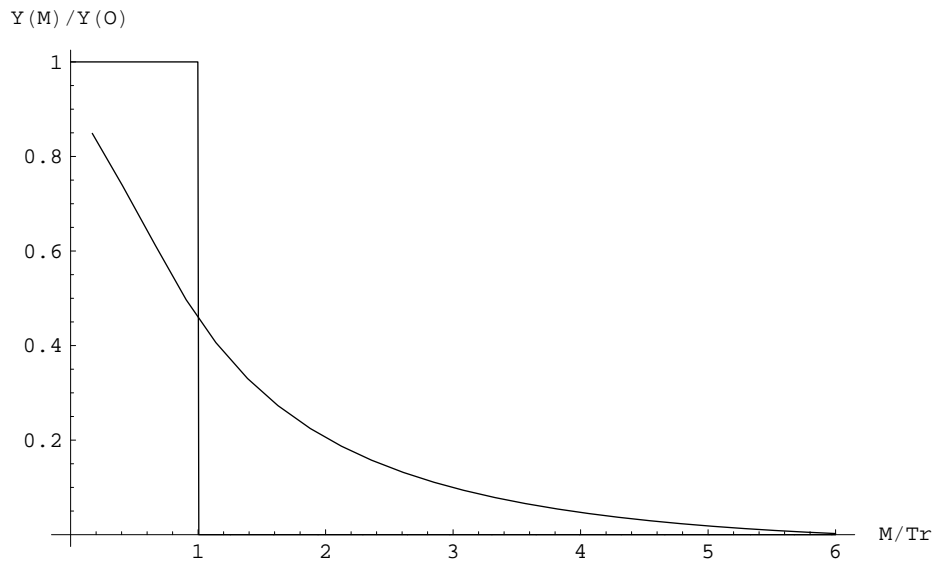


FIG. 4.3 – *Rapport de l'abondance d'un mode massif de gravitino sur un mode non massif en fonction de $x = m/T_R$; la fonction de Heavyside représente l'approximation faite. Près de $x = 0$, l'intégrale de la fonction d'interpolation devient irrégulière et nous avons décidé de ne pas la représenter puisqu'elle n'est pas révélatrice du comportement réel.*

Chapitre 5

Extra-dimension et gravitino : le modèle

5.1 Contexte

Nous allons étudier [42] les conséquences de la désintégration de gravitino en matière noire. Nous allons supposer que le neutralino le plus léger est la principale composante de la matière noire. Dans notre scénario, le gravitino est suffisamment lourd pour se désintégrer avant que ne débute la nucléosynthèse primordiale pour éviter de la perturber en injectant de l'énergie. Nous allons considérer un modèle venant d'une supergravité à 5 dimensions avec la dimension supplémentaire compacte, de géométrie circulaire avec la symétrie Z_2 . On note cette géométrie S^1/Z_2 (orbifold). Nous définirons plus précisément cette notion dans la suite. Dans notre modèle, seuls les champs de supergravité peuvent se propager dans le 'bulk' c'est-à-dire l'ensemble des 4 dimensions spatiales. Nous ne considérerons que le graviton et le gravitino dans le supermultiplet de supergravité qui, à 5 dimensions, possède aussi un champ vecteur, le graviphoton (voir par exemple [12]). La supergravité à 5 dimensions avec un générateur de supersymétrie correspond à une supergravité avec deux générateurs de supersymétrie, $N = 2$, si elle est vue avec le formalisme à 4 dimensions [50]. La supersymétrie $N = 2$ est brisée en $N = 1$ aux points fixes de l'orbifold. Le modèle comportent deux membranes localisées aux points fixes de l'orbifold. Ces membranes n'ont pas de tension et le modèle ne possède pas de constante cosmologique. La matière noire -les neutralinos- est produite thermiquement et non-thermiquement par la désintégration des gravitinos de Kaluza-Klein. On impose à la quantité de matière noire, qui est la somme des deux contributions, d'être compatible avec les observations, ce qui implique une contrainte sur la taille de la dimension supplémentaire en fonction de la température de reheating de l'Univers après l'inflation.

5.2 Introduction détaillée au modèle

La représentation à 5 dimensions de l'Univers a suscité de nombreux travaux dans le cadre de ce que l'on appelle "brane world cosmology". Plusieurs modèles ont été proposés [15]. Les modèles de Randall-Sundrum avec une dimension supplémentaire courbe ne permettent pas de retrouver l'équation de Friedmann classique [17] : un terme supplémentaire proportionnelle à la densité d'énergie-matière au carré fait son apparition : $H^2 \propto \rho(1 + \rho A)$.

Ce terme ne devient important qu'à hautes énergies si A est bien choisi. Dans un modèle à dimension supplémentaire plate type S^1/Z_2 , le problème devient d'autant plus important [16] puisqu'un terme d'ordre ρ^2 apparaît. Il a été montré [18] qu'une stabilisation du radion permettrait de retrouver l'équation de Friedmann classique. Le radion, champ scalaire dit 'champ de moduli' est le champ qui paramétrise la dimension supplémentaire. Le problème de sa stabilisation, c'est-à-dire l'obtention d'un potentiel pour le champ et d'une masse, rejoint finalement le problème plus générale de la stabilisation des champs de moduli des théories de supercordes. Ce problème de la théorie est lié à la méconnaissance de la géométrie et de la taille des dimensions supplémentaires, cette méconnaissance est lié probablement à la méconnaissance de la structure non perturbative de la théorie, de laquelle devrait sortir la compactification des dimensions supplémentaires, puisque le développement perturbatif ne peut faire apparaître la compactification.

La vision à 5 dimensions de l'Univers est motivée théoriquement par la M-théorie qui prédit qu'une des 11 dimensions est plus grande que les autres pour assurer une unification des couplages [28], [6]. Dans ce schéma, l'Univers apparaît à cinq dimensions à un stade d'énergie intermédiaire où les autres dimensions supplémentaires sont trop petites pour être considérées. On obtient ainsi un cadre géométrique où deux membranes localisés aux points fixes de l'orbifold sont séparées par une dimension compacte S^1/Z_2 . La théorie effective de la M-théorie est la supergravité à 11 dimensions avec un générateur de supersymétrie ($N = 1$). Il semble donc cohérent dans ce contexte théorique d'étudier un modèle de supergravité à 5 dimensions où deux membranes sont séparées par une dimension compacte S^1/Z_2 .

Quelques études (par exemple :[10]) ont été faites pour écrire une version supersymétrique des brane world qui permettrait de faire rentrer cette théorie dans le contexte des théories de supercordes. Dans le présent document, nous choisissons de travailler dans un modèle de supergravité à cinq dimensions compactifiée sur S^1/Z_2 où le radion est stabilisé et où les champs de matière et de jauge vivent sur les deux membranes localisées aux points fixes de l'orbifold [50], [51]. Notre Univers est localisé sur une des membranes, l'autre membrane constitue le secteur caché. La supersymétrie offre un candidat pour la matière noire si la R-parité est conservée et résout le problème de la hiérarchie. Dans le présent modèle, l'extra-dimension ne joue aucun rôle pour résoudre le problème de la hiérarchie comme dans les modèles ADD [7], [8] ou de Randall Sundrum [9]. C'est la supersymétrie qui joue ce rôle. Ainsi, la taille de la dimension n'est pas contrainte comme dans [52] et la taille de la dimension supplémentaire peut être hautement plus petite.

On peut se placer par exemple dans un scénario de brisure de supersymétrie dans lequel la brisure est communiquée au secteur observable en partie par le biais des anomalies apparaissant dans la théorie de gravité et en partie par le mécanisme de Scherk-Schwarz [53]. Ce scénario permet d'éviter l'apparition de masses tachioniques (négatives) qui sont présentes dans les scénarios de médiation par les anomalies mais aussi d'éviter les problèmes dus à une médiation purement gravitationnelle. Ce mécanisme donne des masses élevées pour

le gravitino (au-dessus de 10 TeV) comme les scénarios de médiation de la brisure de la supersymétrie par les anomalies [54].

Le gravitino a des modes d'excitations de Kaluza-Klein dans la théorie à 4 dimensions, qui viennent de la présence de l'extra-dimension. Nous supposons que tous les modes sont produits après l'inflation pendant la période de réchauffage (reheating) par des collisions inélastiques dans le bain thermique. Les gravitinos produits sont hors équilibre thermique car leur interaction est d'ordre gravitationnel. On suppose que le mode le plus léger de gravitino, le mode 0, est suffisamment lourd pour se désintégrer avant que la Nucléosynthèse primordiale ne débute. On évite donc les problèmes dues à la désintégration de particules dans la nucléosynthèse primordiale. Un gravitino lourd est naturel dans les scénarios de brisure de supersymétrie médiée par les anomalies ou par un mélange entre une médiation par anomalie et un mécanisme de Scherk-Schwarz.

Les modes de gravitino se désintègrent en particules du modèle standard et en particules supersymétriques. Si la R-parité est conservée, tous les modes de gravitino donnent à la fin de leur cascade de désintégration au moins un LSP qui est le neutralino le plus léger dans le modèle considéré. Le point important est que tous les produits de désintégration n'augmenteront pas automatiquement la quantité de neutralinos. En effet, seuls les modes de gravitino se désintégrant après le découplage thermique du LSP pourront augmenter la quantité de neutralinos. La raison provient du fait que si un mode de gravitino se désintègre avant le découplage thermique du neutralino, il produira des neutralinos qui seront à l'équilibre thermique puisque les neutralinos ne se sont pas encore découplés du plasma. Ceci implique donc qu'un nombre fini de modes de gravitino contribuent à la production non thermique (i.e par désintégration de gravitinos) de matière noire.

La somme de la production thermique et de la production non thermique doit correspondre à la quantité de matière noire. Comme conséquence, on peut tracer des courbes de contraintes entre la taille de la dimension supplémentaire et la température de réchauffage (reheating). En effet, le nombre de modes de gravitinos est lié à la taille de la dimension supplémentaire et la densité de chacun des modes est liée à la température de reheating. Nous avons choisi cette température entre 10^5 GeV et 10^{10} GeV. Ce domaine de températures est assez naturel dans des scénarios qui réalisent la Baryogénèse via Leptogénèse.

Une autre contrainte sur la taille de la dimension supplémentaire provient de la présence de modes de Kaluza-Klein pour les gravitons. Ils peuvent perturber la nucléosynthèse sur leur nombre est trop grand.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord présenter les interactions entre les gravitinos de Kaluza-Klein et le MSSM. Nous discuterons ensuite leur abondance primordiale et leur durée de vie. Après cela, nous donnerons l'expression de la quantité thermique de neutralinos en fonction de $x_f = \frac{m_{lsp}}{T_f}$ où T_f est la température de gel des neutralinos et

m_{lsp} leur masse. Nous donnerons ensuite les équations de contrainte et vérifierons que les gravitons de Kaluza-Klein ne sont pas un problème pour la nucléosynthèse primordiale si $R^{-1} > 1$ TeV. Enfin, nous commenterons et présenterons les résultats sous forme graphique.

5.3 Interaction entre KK gravitinos et MSSM

La masse de Planck (réduite) à 4 dimensions, M , est reliée à la masse de Planck à 5 dimensions M_5 par la relation [50] $M^2 = \pi R M_5^3$ avec $R = \frac{r}{M_5}$ le rayon physique, r une constante réelle indéterminée et $M_5 = \kappa^{-1}$.

Revenons sur la notion d'orbifold dont on a parlé dans l'introduction ; on désigne par orbifold le cercle munie de la symétrie Z_2 qui identifie deux points opposés du cercle ; deux points sont fixes sous cette transformation. C'est sur ces points que se trouvent les membranes. On choisit $x^5 = 0$ et $x^5 = \pi\kappa$ pour les coordonnées des membranes. L'orbifold n'est finalement qu'un segment, de longueur $\pi\kappa$. L'action de Z_2 permet de briser la supersymétrie $N = 2$ en $N = 1$ sur les membranes en assignant une parité différente aux deux champs de gravitinos sous Z_2 .

Comme les champs de matière et de jauge vivent sur une membrane, ces champs n'ont pas de dépendance en x^5 . La supergravité à 5 dimensions possèdent deux champs ¹ de gravitino : un champ pair sous Z_2 et un champ impair sous Z_2 . Les champs de gravitino possèdent le développement de Fourier suivant :

pour le champ pair :

$$\psi_\mu^{\text{even}}(x^\lambda, x^5) = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \left[\psi_{0,\mu}^{\text{even}}(x^\lambda) + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{n,\mu}^{\text{even}}(x^\lambda) \cos(nM_5 x^5) \right], \quad (5.1)$$

et pour le champ impair :

$$\psi_\mu^{\text{odd}}(x^\lambda, x^5) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi r}} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{n,\mu}^{\text{odd}}(x^\lambda) \sin(nM_5 x^5), \quad (5.2)$$

On voit clairement que le champs impair s'annule en 0 ce qui brise la supersymétrie $N = 2$ en $N = 1$ sur la brane $x^5 = 0$.

Nous pouvons définir :

$$\psi_\mu(x^\lambda, x^5) = \psi_\mu^{\text{even}}(x^\lambda, x^5) + \psi_\mu^{\text{odd}}(x^\lambda, x^5) \quad (5.3)$$

$\psi_{n,\mu}^{\text{even}}(x^\lambda)$ and $\psi_{n,\mu}^{\text{odd}}(x^\lambda)$ désignent les modes de Kaluza-Klein.

¹parce que vu avec un formalisme à 4 d.

Nous rappelons l'expression du Lagrangien d'interaction à 4 dimensions du gravitino avec les champs de matière et de jauge :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{inter}^{4d} = & -\frac{1}{\sqrt{2}M} eg_{ij*} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^{*j} \chi^i \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \psi_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}M} eg_{ij*} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^i \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\psi}_\mu \\ & - \frac{i}{2M} e (\psi_\mu \sigma^{\nu\rho} \sigma^\mu \bar{\lambda}_{(a)} + \bar{\psi}_\mu \bar{\sigma}^{\nu\rho} \bar{\sigma}^\mu \lambda_{(a)}) F_{\nu\rho}^{(a)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ce Lagrangien (5.4) doit décrire l'interaction du mode 0 avec les champs de matière et de jauge.

On obtiendra le Lagrangien à 4 dimensions de la théorie à 5 dimensions en intégrant le Lagrangien à 5 dimensions sur la cinquième dimension. Comme les champs de jauge et de matière du secteur observable vivent sur une membrane (par exemple celle localisée en $x^5 = 0$), la partie de l'action qui contient l'interaction du champ de gravitino avec la matière et les champs de jauge est :

$$\begin{aligned} S = \kappa \int d^4x \int_{-\pi\kappa}^{\pi\kappa} dx^5 \delta(x^5) & (-\frac{1}{\sqrt{2}} eg_{ij*} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^{*j} \chi^i \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \psi_\mu(x^\lambda, x^5) - \frac{1}{\sqrt{2}} eg_{ij*} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^i \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\psi}_\mu(x^\lambda, x^5) \\ & - \frac{i}{2} e (\psi_\mu(x^\lambda, x^5) \sigma^{\nu\rho} \sigma^\mu \bar{\lambda}_{(a)} + \bar{\psi}_\mu(x^\lambda, x^5) \bar{\sigma}^{\nu\rho} \bar{\sigma}^\mu \lambda_{(a)}) F_{\nu\rho}^{(a)}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

En utilisant la définition (5.3) et en insérant les développements de Fourier du gravitino (5.1) et (5.2) dans l'action ci-dessus (5.5), on trouve les interactions de chaque KK mode avec la matière et les champs de jauges après avoir intégré sur la cinquième dimension. Après avoir redéfini les KK modes du gravitino ([50], [51]) :

$$\psi_{n,\mu} = \frac{\psi_{n,\mu}^{even} + \psi_{n,\mu}^{odd}}{\sqrt{2}}, \text{ for } n > 0 \quad (5.6)$$

$$\psi_{0,\mu} = \psi_{0,\mu}^{even} \quad (5.7)$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{interKK}^{4d} = \sum_{n=0}^{\infty} & (-\frac{1}{\sqrt{2}M} eg_{ij*} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^{*j} \chi^i \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \psi_{n,\mu} - \frac{1}{\sqrt{2}M} eg_{ij*} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^i \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\psi}_{n,\mu} \\ & - \frac{i}{2M} e (\psi_{n,\mu} \sigma^{\nu\lambda} \sigma^\mu \bar{\lambda}_{(a)} + \bar{\psi}_{n,\mu} \bar{\sigma}^{\nu\lambda} \bar{\sigma}^\mu \lambda_{(a)}) F_{\nu\lambda}^{(a)}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ainsi, on obtient une somme infinie du Lagrangien (5.4). Chaque mode de Kaluza-Klein a la même interaction avec la matière et les champs de jauge. Ce n'est pas une surprise dans le sens où le graviton et le gravitino sont dans le même supermultiplet, or chaque KK gravitons a la même interaction avec les champs de jauge et de matière [55].

Les modes de Kaluza-Klein diffèrent entre eux seulement par leur masse. Ils obtiennent leur

masse par le mécanisme de super-Higgs en absorbant les degrés de liberté des goldstinos qui sont, dans le modèle d'extra-dimension, les spineurs ψ^5 .

D'autres redéfinitions des champs de gravitino doivent être faites pour obtenir la matrice de masse des gravitinos. Ces redéfinitions ne jouent pas de rôle sur la partie interaction. Après diagonalisation de la matrice de masse, il n'y a pas d'interaction entre les différents modes de Kaluza-Klein.

La masse du mode n est reliée à la masse du mode 0 par la relation [50],[51] :

$$M_n = M_0 + \frac{n}{R} \quad (5.9)$$

On constate que la relation est linéaire en n . En effet, on a $M_n^2 = n^2/R^2$ et c'est seulement après la brisure de la supersymétrie $N = 1$ que les masses sont translatées de M_0 .

Pour terminer ce paragraphe, nous ferons une remarque importante pour la suite de ce manuscript : les interactions du gravitino avec le secteur caché ou la membrane miroir ne sont pas pris en compte que ce soit pour la production de gravitinos ou pour la désintégration de gravitinos. La première raison (qui n'en est pas vraiment une !) est la méconnaissance de ces interactions avec cette autre membrane et son contenu en particules. La seconde raison est que si l'on suppose que la membrane miroir a les mêmes interactions que le secteur visible avec le gravitino, la production devrait être semblable pour les deux membranes donc double au total, cependant ce qui nous intéresse est la désintégration de ces gravitinos dans le secteur visible, or s'ils ont la même interaction avec les deux secteurs, ils doivent se désintégrer en quantité équivalente sur une membrane et sur l'autre mais comme leur production est double, on peut donc ne considérer qu'une membrane pour la production et pour la désintégration.

5.4 Abondances des KK modes

Dans ce travail, nous supposons que les gravitinos sont produits par des effets de collisions inélastiques dans le bain thermique pendant le réchauffage de l'Univers après l'inflation. Pourtant, d'autres mécanismes peuvent créer des gravitinos comme la désintégration de particules scalaires, les moduli [57], [58]. Dans notre modèle, la masse du radion Φ est très faible [8] de l'ordre de 10^{-4} eV et ne peut donc pas se désintégrer en gravitinos. Pourtant, la faible masse du radion peut devenir un problème pour la cosmologie parce qu'il peut dominer la densité d'énergie de l'Univers si la valeur de son potentiel à $\Phi = 0$ est proche de la masse de Planck [59]. Ce problème est résolu si la valeur du potentiel à $\Phi = 0$ est entre 10^{10} and 10^{12} GeV [59].

Plusieurs groupes ont travaillé sur le calcul de l'abondance primordiale de gravitinos : [38], [61], [41], et récemment [56].

Le groupe [61] a un résultat légèrement différent de celui de [38]. Le groupe [41] prend en compte la production durant l'inflation et trouve le même résultat que [61] qui ne prend

pas en compte cette production. Enfin, assez récemment, [56] a fait le calcul en ajoutant une production par des désintégrations de particules qui ont acquis des masses thermiques. Nous avons utilisé le calcul fait par [38] et par [41]. On rappelle l'expression du résultat qui correspond à l'abondance du mode 0 :

$$Y_{3/2} \simeq 1.9 \times 10^{-12} \times \left(\frac{T_R}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \left[1 + 0.045 \ln \left(\frac{T_R}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \right] \left[1 - 0.028 \ln \left(\frac{T_R}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \right], \quad (5.10)$$

On rappelle la règle déduite au chapitre précédent pour l'abondance de modes massifs, que nous appliquons ici aux modes de Kaluza-Klein :

$$\begin{aligned} Y_{3/2}^k &= Y_{3/2}^0, \quad \text{for } M^k \leq T_R \quad \text{and} \\ Y_{3/2}^k &= 0, \quad \text{for } M^k > T_R \end{aligned} \quad (5.11)$$

où k représente l'indice de Kaluza-Klein, M^k est la masse du k^{ime} mode et $Y_{3/2}^k$ son abondance.

Cette règle sur l'abondance peut s'appliquer aux gravitinos de Kaluza-Klein car on a vu au paragraphe précédent qu'ils ne diffèrent les uns des autres que par leur masses et que leurs interactions avec la matière et les champs de jauge étaient les mêmes.

5.5 Désintégration des modes de gravitino

Le gravitino a des interactions d'ordre gravitationnel avec les particules du MSSM. Sa durée de vie est très longue comparée à celle des autres particules; c'est d'ailleurs son principale problème avec la cosmologie. S'il vit trop longtemps c'est-à-dire au delà d'une seconde, il se désintègre pendant et après la nucléosynthèse primordiale et si sa quantité est trop importante, il peut la perturber. A partir des rapports de branchement, et des taux de désintégration Γ fournis par [41], nous avons calculé la durée de vie $\tau = 1/\Gamma_{tot}$ pour des gravitinos très lourds (masses $> 10 \text{ TeV}$) :

$$\tau_k = 1.4 \cdot 10^7 \times \left(\frac{M_k}{100 \text{ GeV}} \right)^{-3} \text{ Sec} \quad (5.12)$$

Où k est l'indice de Kaluza-Klein, et M_k est la masse du mode correspondant. Rappelons que dans le modèle, le LSP est le neutralino le plus léger.

Plusieurs chaînes de désintégrations sont possibles. Les gravitinos lourds se désintègrent principalement en pair squark-quark et gluon-gluino [41]. Les squarks produits se désintègrent à leur tour en neutralino plus photon. Les gluinos se désintègrent en squarks plus

gluon et les squarks produits par les gluinos se désintègrent à leur tour en neutralinos.

Un gravitino lourd produit au minimum un neutralino non thermique en bout de chaîne de désintégration et pas moins : en effet, la densité de particules supersymétriques produites par la désintégration de gravitinos est si faible ($Y \approx 10^{-12}$) qu'elles se désintègrent plutôt que d'interagir entre elles pour produire des particules du modèle standard : dans l'équation de Boltzmann, le terme de désintégration est proportionnel à Y alors que le terme d'annihilation est proportionnel à Y^2 . D'autre part, nous avons vérifié que l'annihilation des LSP est négligeable dans le modèle considéré. Nous montrerons cela dans le paragraphe présentant les courbes de contraintes.

Nous avons supposé qu'un gravitino ne produisait pas plus d'un LSP car même si les quarks ou les gluons de hautes énergies produits par la désintégration du gravitino interagissent entre eux ou avec un quark ou un gluon du plasma, ils devraient produire des quarks ou des gluons en plus grand nombre que des paires de squarks ou de gluinos pour des raisons cinématiques liées au fait que les squarks et les gluinos ont une masse beaucoup plus grande que leur partenaires du modèle standard. Si les masses sont négligeables par rapport à l'énergie dans le centre de masse, et que les quarks et les gluons sont produits dans la même quantité que les paires de particules supersymétriques, il est probable que les particules supersymétriques étant produites par paires 'se voient' plus que si elles étaient produites seules et que donc, l'interaction forte étant beaucoup plus importante que la faible, interagissent 'fortement' entre elles pour donner des quarks et des gluons, plutôt que de se désintégrer par interaction faible et donner un neutralino. Une vérification numérique de cette hypothèse reste à faire. Dans un souci de simplicité, et pour avoir la contrainte minimum sur la taille de la dimension supplémentaire, nous avons travaillé avec le postulat qu'un gravitino donnait un LSP. En effet, si plus d'un neutralino était produit par désintégration de gravitinos, cela aurait pour conséquence d'augmenter la contrainte sur la taille de la dimension supplémentaire : ceci se constatera aisément avec la suite de l'exposé.

La désintégration d'un mode de gravitino n'accroît pas la densité d'entropie car la densité d'énergie de chaque mode de gravitino au moment de sa désintégration est toujours négligeable devant la densité d'énergie de la radiation au même moment.

En effet, on a, pour les deux densités à comparer : $\rho_{rad}(T_k) = (\pi^2/30)g^*(T_k) T_k^4$ où T_k est la température où se désintègre le mode k et on a : $\rho_G(T_k) = M^k Y_{3/2} s(T_k)$. Ce que nous voulons vérifier est que $\rho_{rad}(T_k) \gg \rho_G(T_k)$ quelque soit T_k . On doit donc vérifier que :

$$\frac{\pi^2}{30} T_k^4 \gg \frac{2\pi}{45} M^k Y_{3/2} \quad (5.13)$$

Choisissons le cas extrême du gravitino le plus lourd² soit $M^k = 10^7$ GeV et où $Y_{3/2}$

²Les masses seront donnés dans un paragraphe prochain

est choisi maximum c'est-à-dire pour $T_R = 10^{10}$ GeV (rappelons que $Y_{3/2} \approx 1.9 \cdot 10^{-12} \frac{T_R}{10^{10}}$). Nous verrons dans la suite que le gravitino le plus lourd se désintègre pour $T_k \approx 4$ GeV. On vérifie donc, que dans ce cas, l'inéquation (5.13) est vérifiée.

Cette inéquation est même vérifiée dans le cas (irréaliste) où toutes les grandeurs de droite sont maximisées et celles de gauche minimisées c'est-à-dire pour $M^k = 10^7$ GeV, $T_k = 1$ MeV, $T_R = 10^{10}$ GeV.

5.6 Neutralinos

Dans notre modèle, le LSP est le neutralino le plus léger. Nous avons choisi de travailler avec une masse pour le LSP de 120 GeV. Les résultats peuvent être données pour un autre choix de masse : nous avons par exemple étudié le cas où le LSP a une masse de 200 GeV. Les résultats pour ce cas sont données dans l'Annexe.

La densité de matière noire est [2] :

$$0.106 < \Omega h^2 < 0.123, \quad (5.14)$$

avec une valeur centrale de 0.114

Dans la courbe représentant l'évolution de l'abondance des neutralinos Y_{lsp} comme une fonction de $x = \frac{m_{lsp}}{T}$, il y a deux zones. La première zone est la zone dans laquelle les neutralinos sont à l'équilibre thermique et dans laquelle Y_{lsp} décroît. La seconde zone est la zone après le gel thermique des neutralinos, la zone dans laquelle, ils se sont découplés de l'équilibre thermique, et dans laquelle Y_{lsp} est constant. Le gel survient pour $x = x_f$ ou, autrement écrit, pour $T = T_f$.

Si l'on appelle Ω_{th} la densité thermique de neutralinos, on trouve cette relation approximée entre Ω_{th} and x_f :

$$\Omega_{th} h^2 = 3.61 \cdot 10^6 \frac{m_{lsp}}{1\text{GeV}} x_f^2 e^{-x_f} \quad (5.15)$$

Pour établir cette relation, nous avons utilisé [19]. Cette relation est déduite des suivantes dans lesquelles nous avons négligé le double logarithme devant le logarithme :

$$x_f = \ln[0.038(n+1) \frac{g}{g_\star^{1/2}} m_{pl} m_{lsp} \sigma_0] - (n + \frac{1}{2}) \ln[\ln[0.038(n+1) \frac{g}{g_\star^{1/2}} m_{pl} m_{lsp} \sigma_0]] \quad (5.16)$$

$$\Omega_{th} h^2 = 1.07 \times 10^9 \frac{(n+1)x_f^{n+1}}{(g_{\star S}/g_\star^{1/2})m_{pl} \sigma_0} \quad (5.17)$$

avec $n = 1$ (pour une p wave annihilation), $g_\star = g_{\star S} = 90$, $g = 2$

où g_\star est le nombre effectif de degrés de liberté sans masse, et m_{pl} est la masse de Planck (non réduite, cette fois).

Nous avons représenté la fonction (5.15) sur la figure (5.1) sur laquelle est aussi représentée la plage de valeurs autorisées par les observations pour la quantité totale de matière noire.

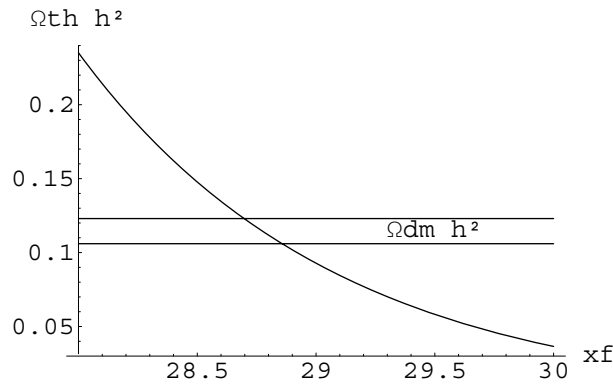


FIG. 5.1 – $\Omega_{th} h^2$ fonction de x_f . $\Omega_{dm} h^2$ se situe entre les deux droites.

Nous avons choisi différentes valeurs pour $\Omega_{th} h^2$ et nous avons complété cette quantité avec la densité non thermique de neutralinos qui est issue de la désintégration des gravitinos, pour obtenir la bonne quantité totale de matière noire.

Nous appelons la quantité non thermique $\Delta\Omega h^2$. On peut écrire :

$$0.106 \leq \Omega_{th} h^2 + \Delta\Omega h^2 \leq 0.123 \quad (5.18)$$

Comme un gravitino produit un neutralino, on peut écrire :

$$\Delta\Omega h^2 = \frac{m_{lsp} s_0 h^2}{\rho_c} \sum_{k=0}^{k=\bar{n}} Y_{3/2}^k \quad (5.19)$$

L'indice \bar{n} correspond au dernier mode à prendre en compte. C'est le mode se désintégrant principalement juste après le découplage thermique du LSP. On rappelle que seuls les modes se désintégrant après le découplage thermique du LSP contribuent à augmenter la quantité de neutralinos. Les neutralinos produits par désintégration avant le découplage thermique ne peuvent augmenter la quantité de neutralinos puisque ces derniers sont alors à l'équilibre thermique.

5.7 Le modèle

5.7.1 Les masses

La densité thermique de neutralinos $\Omega_{th} h^2$ et x_f sont reliées par l'équation (5.15). Si l'on fixe la quantité thermique, on peut calculer la quantité non thermique en respectant la condition donnée par l'encadrement (5.18).

Si l'on fixe la quantité thermique, on peut déterminer x_f et calculer T_f et donc la masse du dernier gravitino pris en compte qui, rappelons-le, se désintègre à $T = T_f$.

Pour calculer cette masse, on a besoin d'une relation qui lie la température au temps. Dans un univers dominé par la radiation, en supposant une entropie constante par comoving volume, cette relation est :

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{90 M^2}{g_* \pi^2}} T^{-2} \text{ GeV}^{-1} \quad (5.20)$$

Avec M la masse réduite de Planck.

Nous utilisons la relation (5.20) pour calculer la masse du mode \bar{n} mais aussi pour calculer la masse du mode 0. Pour le mode \bar{n} , $g_* = 90$ et pour le mode 0, $g_* = 10$.

Nous écrivons l'égalité entre la durée de vie du mode de gravitino (5.12) et l'âge de l'Univers (5.20) en prenant soin de convertir l'équation (5.20) en seconde. Faisons une petite remarque : même si les gravitinos produits ne sont pas suffisamment lourds au moment de leur création pour être considérés comme non relativiste, on peut assimiler la durée de vie du gravitino à l'âge de l'univers puisque la majeure partie de la durée de vie du gravitino se fait quand il n'est pas relativiste.

Rappelons que le gravitino qui se désintègre principalement à T_f est le dernier mode pris en compte dans la tour de Kaluza-Klein. Il est désigné par l'indice \bar{n} .

Pour calculer la masse du mode 0, on pose comme condition qu'il se désintègre principalement à $T = 1 \text{ MeV}$ pour ne pas perturber la BBN. Pour une température égale à 1 MeV, on trouve, avec l'équation (5.20), $t = 0.76 \text{ s}$. On peut calculer ensuite M_0 avec l'équation (5.12) en écrivant : $\tau_0 = 0.76 \text{ s}$.

On obtient $M_0 = 26.410 \text{ TeV}$.

La masse du mode \bar{n} dépend de la valeur de x_f qui dépend du choix fait pour $\Omega_{th} h^2$.

5.7.2 Valeurs numériques

Nous avons choisi trois valeurs différentes pour $\Omega_{th} h^2$.

La première valeur correspond à la valeur centrale pour la densité de matière noire c'est-à-dire $\Omega_{th} h^2 = 0.114$. Cette valeur est notre choix maximal pour la quantité thermique.

Une autre valeur est calculée en choisissant la valeur maximale pour σ_0 , section efficace d'annihilation des LSP. Cette section efficace est génériquement bornée par [62] :

$$\sigma_0 \leq \frac{\alpha}{m_{lsp}^2}, \quad (5.21)$$

Avec $\alpha \sim 10^{-2}$.

En utilisant la valeur maximale pour la section efficace des neutralinos, on trouve notre contribution minimale à la densité thermique de matière noire.

La valeur médiane que nous choisissons pour la quantité thermique correspond au choix de x_f pris entre nos deux valeurs extrémales pour x_f . Nous avons calculé la quantité thermique correspondante.

Le tableau (5.1) présente les résultats.

Cases	x_f	$T_f(\text{GeV})$	$\Omega_{th} h^2$	$(\Delta\Omega_{th} h^2)_{min}$	$(\Delta\Omega_{th} h^2)_{max}$	$M_{\bar{n}}(\text{GeV})$
Case 1	28.78	4.17	0.114	-	0.009	9.84×10^6
Case 2	29.60	4.05	0.053	0.053	0.070	9.66×10^6
Case 3	30.42	3.94	0.025	0.081	0.098	9.48×10^6

TAB. 5.1 – Les trois cas numériques pour $m_{lsp} = 120 \text{ GeV}$

5.7.3 Les équations de contrainte

En utilisant l'équation (5.19) et en remplaçant $Y_{3/2}^k$ par sa valeur (5.11), on obtient la production non thermique de LSP. Nous devons distinguer deux cas.

Le premier cas est quand la masse du dernier mode pris en compte, le mode \bar{n} , est inférieur ou égale à T_R c'est-à-dire $T_R \geq M^{\bar{n}}$. Dans ce cas, si l'on regarde les équations (5.11), on déduit que $Y_{3/2}^k = Y_{3/2}^0$ et donc on obtient de l'équation (5.19) :

$$\Delta\Omega h^2 = \frac{m_{lsp} (\bar{n} + 1) Y_{3/2}^0 s_0 h^2}{\rho_c} \quad (5.22)$$

Nous devrions ensuite remplacer \bar{n} par sa valeur fonction de R^{-1} , $M^{\bar{n}}$ and M^0 :

$$\bar{n} = \frac{M^{\bar{n}} - M^0}{R^{-1}} \quad (5.23)$$

Mais gardons à l'esprit que \bar{n} est un nombre entier ce qui signifie que R^{-1} doit avoir une valeur qui permette que le rapport $\frac{M^{\bar{n}} - M^0}{R^{-1}}$ soit un entier.

Nous allons faire coïncider la réalité physique avec un modèle de Kaluza-Klein : nous remplaçons \bar{n} par son expression après l'avoir isolé d'un côté de l'équation (5.22) et nous définissons une fonction I qui agit sur les nombres réels pour en extraire la partie entière et que l'on applique à l'autre côté de l'équation.

On obtient, alors, en remplaçant $Y_{3/2}^0$ par son expression (5.10) :

$$R^{-1} = (M^{\bar{n}} - M^0) \times \left(I \left[\Delta\Omega h^2 \frac{\rho_c}{m_{lsp} s_0 h^2} \frac{1}{1.9 \times 10^{-12} \times \frac{T_R}{10^{10}} [1 + 0.045 \ln(\frac{T_R}{10^{10}})] [1 - 0.028 \ln(\frac{T_R}{10^{10}})]} \right] - 1 \right)^{-1} \quad (5.24)$$

Dans l'équation ci-dessus (5.24), nous avons utilisé le tableau (5.1) pour fixer les valeurs limites sur $\Delta\Omega h^2$.

Cette équation est valide pour $T_R \geq M^{\bar{n}}$ et pour un nombre de modes au moins égale à 2. Cette dernière condition implique aussi une limite sur T_R : au-dessus de la température correspondant à un nombre de modes égale à 2, il n'y a plus qu'un seul mode qui produit l'ensemble des neutralinos non thermiques. Nous avons calculé les deux limites précédentes sur T_R pour les trois cas. Les résultats sont présentés sur les graphes.

Nous avons aussi calculé la température de reheating maximum autorisée s'il n'y a qu'un seul mode. Les résultats sont présentés dans le tableau (5.2) et converge vers les valeurs trouvées dans [63] dans la limite d'une quantité thermique nulle.

case 1	case 2	case 3
1.45 10 ⁹ GeV	1.09 10 ¹⁰ GeV	1.52 10 ¹⁰ GeV

TAB. 5.2 – *Température de reheating maximum autorisée*

$T_R < M^{\bar{n}}$ est le second cas. La masse du dernier mode qui devrait être pris en compte a, alors, une abondance nulle d'après la règle donnée dans l'équation (5.11). Dans ce cas, la masse du dernier mode qui sera effectivement pris en compte est égale à T_R . On obtient l'équation de contrainte liée à ce cas simplement en remplaçant $M^{\bar{n}}$ par T_R dans l'équation (5.24).

5.8 Gravitons

Si des gravitinos de Kaluza-Klein sont produits, nous avons aussi des gravitons de Kaluza-Klein. Nous devons vérifier qu'ils ne perturbent pas la nucléosynthèse primordiale puisqu'ils sont plus lourds que dans le cas des 'grandes' dimensions supplémentaires usuellement considérées. Dans notre modèle, les contraintes astrophysiques et cosmologiques usuelles disparaissent comme dans le cas de [64]. Mais un nouvel ennui survient : la BBN ne doit pas être perturbée. La masse des gravitons de KK est :

$$m_k = \frac{k}{R} \quad (5.25)$$

Ainsi, le mode 1 est le premier mode massif avec une masse égale à $1/R$. Dans la suite, nous montrerons que pour $R^{-1} \geq 1$ TeV, la BBN n'est pas perturbée. Pour des rayons plus grands, les gravitons de KK commencent à affecter la BBN comme il sera montré avec notre méthode approximative. Nous ferons donc tous nos calculs pour la valeur limite $R^{-1} = 1$ TeV. Une étude plus précise avec le code³ écrit par Karsten Jedamzik est en cours pour déterminer de manière précise le rayon limite autorisé. Il semble d'ailleurs que les premiers résultats donnent des résultats encourageants pour le problème de la synthèse du Lithium 6 et 7.

L'équation de production des gravitons de KK est donnée par [52] et [65]. Nous pouvons utiliser la même équation :

$$s\dot{Y}_m = \frac{11m^5T}{128\pi^3M^2} K_1(m/T), \quad (5.26)$$

Où K_1 est la fonction de Bessel modifiée du premier genre, m est la masse du graviton, T la temperature et M la masse de Planck réduite.

En intégrant cette équation entre la température de reheating et une température plus basse que 1 MeV, on trouve :

$$Y_m(T_R) = \frac{1485}{256\pi^5M} \frac{1}{g^{*1/2}g_S^*} m \int_{m/T_R}^{\infty} x^3 K_1(x) dx \quad (5.27)$$

où g^* et g_S^* sont pris constants égaux à 10 puisque l'essentiel de la durée de vie des gravitons considérés se fait après $T = 1$ MeV.

Nous avons calculé la durée de vie des gravitons de KK de masse supérieure à 1 TeV en utilisant les taux de désintégrations donnés par [55]. On trouve :

$$\tau = 3.310 \times \frac{\pi M^2}{m^3} \text{ GeV}^{-1} \quad (5.28)$$

³pour évaluer l'impact sur la BBN de désintégration électromagnétique et hadronique

Nous avons ensuite calculé la masse du graviton qui se désintègre principalement à $T = 1$ MeV en utilisant l'équation (5.20) et l'équation (5.28). Ce graviton est le dernier que nous prendrons en compte dans notre étude⁴. Nous trouvons $m = 37.4$ TeV et sa durée de vie est $\tau = 0.75$ s. Comme le rayon est égale à 1 TeV, le dernier mode considéré a une masse égale à 38 TeV.

Pour vérifier si les gravitons de KK perturbent la BBN, nous avons utilisé les courbes données par Jedamzik dans [66]. Ces courbes donnent une limite sur la densité à notre époque d'une particule massive instable (si elle ne se désintégrait pas) en fonction de sa durée de vie.

Nous avons donc calculé la densité de gravitons à notre époque s'ils ne se désintégraient pas.

Nous avons aussi besoin pour interpréter les courbes des rapports de branchement hadronique de désintégration des gravitons car les courbes sont différentes suivant la valeur de ce rapport. Nous avons trouvé $Bh = 0.70$ pour des gravitons de masse supérieure à 1 TeV en utilisant les taux de désintégrations fournis par [55].

Les courbes utilisées sont conçues pour une seule particule se désintégrant et, non comme dans le cas présent, pour une tour de particules. Nous pouvons cependant diviser l'étude en deux zones et faire la somme des contributions des modes dans chacune des zones. La première zone choisie est après $\tau = 100$ s et l'autre avant.

Dans la première zone (i.e $\tau \geq 100$ s), nous avons pris comme limite sur les courbes de Jedamzik, la valeur estimée suivante : $\Omega h^2 = 5 \cdot 10^{-5}$ et avant 100 s, nous avons pris la limite : $\Omega h^2 = 10^{-1}$. Il nous faut donc vérifier que la densité des gravitons est sous ces limites dans chacune des zones.

La masse du graviton dont la durée de vie est 100 s est 7.33 TeV. Nous allons donc sommer la densité des 7 premiers modes de la première zone et nous allons vérifier que leur somme est inférieure à $5 \cdot 10^{-5}$.

Nous allons aussi sommer les contributions des 31 modes de la seconde zone et contrôler que cette somme est inférieure à 10^{-1} .

La densité pour les gravitons est :

⁴Les gravitons de masse supérieure ne joue pas de rôle même dans la production de matière noire car leur abondance (5.27) est négligeable comparée à celles des gravitinos

$$\Omega h^2 = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k Y_k s_0 h^2}{\rho_c} = \frac{s_0 h^2}{\rho_c} \sum_{k=1}^{k=n} m_k^2 \frac{1485}{256 \pi^5 M g^{*1/2} g_S^*} \int_{m_k/T_R}^{\infty} x^3 K_1(x) dx \quad (5.29)$$

où nous avons utilisé l'équation (5.27) dans laquelle nous avons remplacé m by m_k et Y_m par Y_k puisque chaque masse est associé à un mode.

Nous savons que :

$$\int_{m_k/T_R}^{\infty} x^3 K_1(x) dx \leq 4.71 \quad (5.30)$$

Cette intégrale est égale à 4.71 pour $m = 0$ ou pour $m \ll T_R$. Si $m = T_R$, l'intégrale est égale à 4.47.

Dans le domaine de valeurs pour m et T_R que nous avons, nous pouvons choisir de prendre la valeur de l'intégrale égale à 4.71. En effet, pour des masses plus faibles que 7 TeV, il est évident que $m/T_R \ll 1$ et pour des masses plus grandes que 7 TeV et proches de 38 TeV, l'erreur faite majore la densité, que nous voulons montrer être plus petite qu'une limite : nous pouvons donc utiliser cette valeur de l'intégrale pour nos vérifications.

On obtient donc pour la densité :

$$\Omega h^2 \approx 4.71 \frac{s_0 h^2}{\rho_c} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1485 m_k^2}{256 \pi^5 M g^{*1/2} g_S^*} \quad (5.31)$$

On peut remplacer m_k par $\frac{k}{R}$ et après avoir fait la somme sur k on trouve :

$$\Omega h^2 \approx 5.52 \cdot 10^{-14} \frac{n(1+n)(1+2n)}{R^2} \quad (5.32)$$

Remarquons que $n = m_n R$ et donc Ωh^2 est proportionnelle à R . Ainsi plus le rayon est grand, plus Ωh^2 est grand.

La masse du dernier mode de la première zone est 7 TeV donc après avoir remplacé n par $m_n R$ dans l'équation (5.32), on trouve :

$$\Omega h^2 = 4.64 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-5} \quad (5.33)$$

Le résultat est sous la limite mais assez proche d'elle. Nous pouvons conclure dans une première estimation que les 7 premiers modes ne perturbent pas la BBN.

La masse du dernier mode de la seconde zone est 38 TeV donc après avoir remplacé n

par $m_n R$ dans l'équation (5.32), on peut évaluer la contribution des 31 modes. Dans notre calcul, nous allons aussi prendre en compte les 7 premiers modes dont la contribution est négligeable. On trouve :

$$\Omega h^2 = 6.30 \cdot 10^{-3} < 10^{-1} \quad (5.34)$$

Ce résultat est bien en-dessous de la limite. Nous pouvons conclure que la densité des 31 modes de gravitons ne perturbe pas la BBN.

Nous pouvons conclure ce paragraphe en disant que les courbes que nous présenterons possède une nouvelle limite $R^{-1} \geq 1$ TeV. Cette limite provient des gravitons de Kaluza-Klein. Une étude plus précise est en cours pour vérifier si cette limite peut être modifiée, et si le rayon peut être plus important. Cette étude semble, par ailleurs, avoir des implications positives quant aux quantités de lithium 6 et 7.

5.9 Resultats

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats pour les trois cas que nous avons considérés. Le premier cas est le cas où $\Omega_{th} h^2$ est notre maximum 0.114 et donc la partie non-thermique doit être plus petite que 0.009. Le second cas est le cas intermédiaire : $\Omega_{th} h^2 = 0.053$ et donc la partie non thermique doit être plus grande que 0.053 et plus petite que 0.070. Le troisième cas est le cas minimum pour $\Omega_{th} h^2$ c'est-à-dire $\Omega_{th} h^2 = 0.025$: la partie non thermique doit être plus grande que 0.081 et plus petite que 0.098.

Le domaine de valeurs choisies pour T_R court de 10^5 à 10^{10} GeV. Tous ces cas sont traités pour $m_{lsp} = 120$ GeV. Nous avons aussi traité trois cas pour $m_{lsp} = 200$ GeV (voir Appendice).

Nous expliquerons, aussi dans ce paragraphe, pour quelles raisons nous avons négligé l'annihilation des neutralinos.

Le premier commentaire générale que nous pouvons faire sur les courbes est qu'elles sont toutes croissantes. En effet, plus la température de reheating est basse, plus le nombre de modes nécessaires est important et, donc, plus petit est R^{-1} . En effet, la densité de gravitinos (et donc la partie non thermique des neutralinos) est proportionnelle à la température de reheating.

Nous pouvons observer que les courbes du premier cas sont au-dessus des courbes du second cas, elles-même au-dessus des courbes du dernier cas. En effet, plus on a besoin de produire de matière noire, plus R^{-1} est petit.

Nous pouvons aussi remarquer que toutes les courbes convergent vers la même valeur pour R^{-1} : cette valeur est en fait la différence de masse entre le mode qui se désintègre

principalement à $T = 1$ MeV et le dernier mode qui se désintègre principalement à T_f or nous avons vu (cf (5.1)) que les trois valeurs de $M_{\tilde{n}}$ sont proches.

Nous remarquons aussi une structure discrète visible sur les courbes au-delà d'une certaine température. Cette structure est toujours présente si l'on 'zoom' suffisamment sur les graphes. Pour les hautes températures, cette structure est visible sur les graphes puisque le nombre de modes est bas.

Nous avons aussi représenté sur chaque figure la limite $R^{-1} \geq 1$ TeV provenant de la contrainte sur les gravitons.

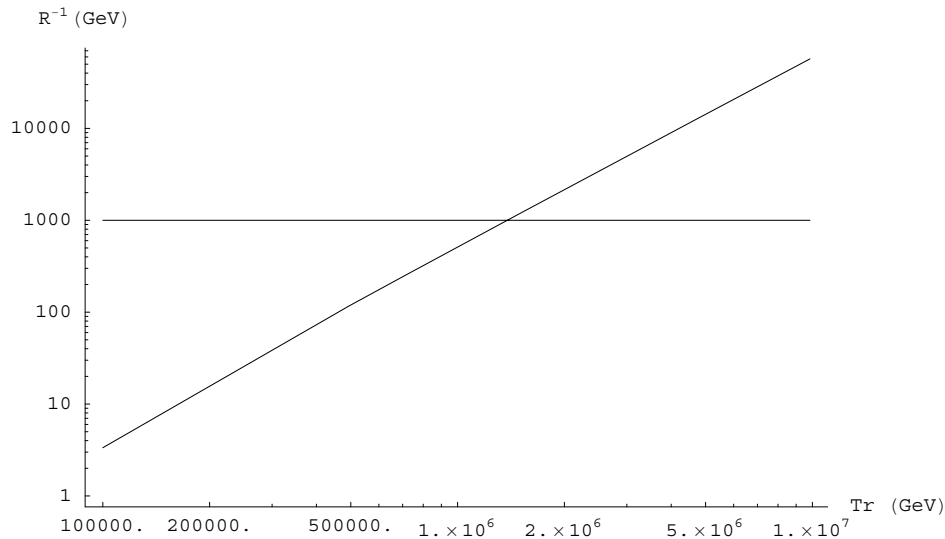


FIG. 5.2 – Cas 1. T_R plus petit que $9.84 \cdot 10^6$ GeV. La zone exclue est sous la courbe diagonale et sous la droite $R^{-1} = 1$ TeV si la contrainte sur les KK gravitons est pris en compte.

La figure (5.2) correspond au cas 1 pour T_R plus petit que $9.84 \cdot 10^6$ GeV. Cette température correspond au cas limite $M^n = T_R$. La zone exclue est sous la courbe.

La taille maximum pour R correspond au minimum pour R^{-1} . Si l'on ne prend pas en compte la contrainte des gravitons, le minimum est $R^{-1} = 3.35$ GeV pour $T_R = 10^5$ GeV. R devrait donc être plus petit ou égal à $5.89 \cdot 10^{-15}$ cm pour $T_R = 10^5$ GeV.

Si l'on prend en compte la limite sur les gravitons, R doit être égale ou plus petit que $1.97 \cdot 10^{-17}$ cm.

Pour $T_R = 9.84 \cdot 10^6$ GeV, $R \leq 3.46 \cdot 10^{-19}$ cm.

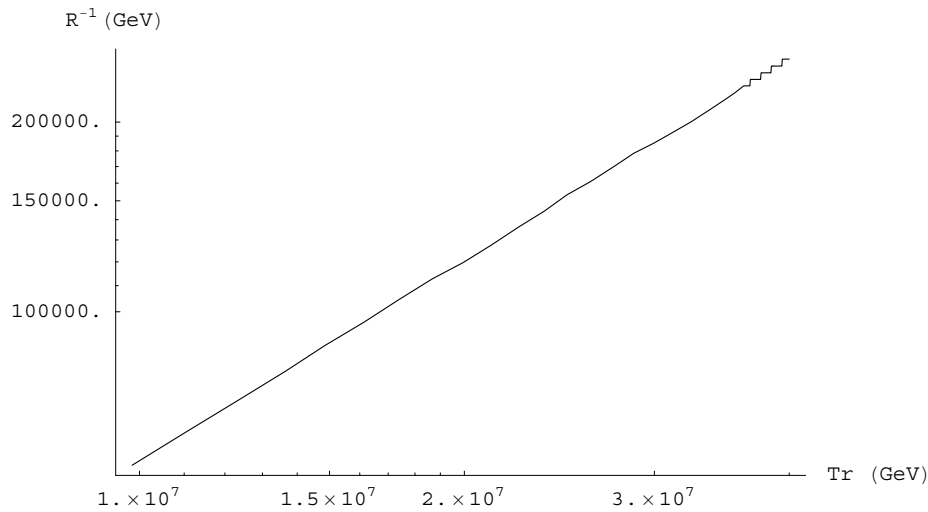


FIG. 5.3 – Cas 1. $9.84 \cdot 10^6 \text{ GeV} \leq T_R \leq 4 \cdot 10^7 \text{ GeV}$. La zone exclue est sous la courbe.

La figure (5.3) représente le cas 1 pour des températures de reheating comprises entre $9.84 \cdot 10^6 \text{ GeV}$ et $4 \cdot 10^7 \text{ GeV}$. La zone exclue est sous la courbe.

Pour $T_R = 4 \cdot 10^7 \text{ GeV}$, $R \leq 7.84 \cdot 10^{-20} \text{ cm}$.

La figure (5.4) est le cas 1 pour des températures comprise entre $4 \cdot 10^7 \text{ GeV}$ et $7.40 \cdot 10^8 \text{ GeV}$. La zone exclue est sous la courbe. Pour des températures comprises entre $4.98 \cdot 10^8 \text{ GeV}$ et $7.40 \cdot 10^8 \text{ GeV}$, le nombre de modes maximum autorisé est 2 et $R \leq 2.01 \cdot 10^{-21} \text{ cm}$. Au-dessus de la température $7.40 \cdot 10^8 \text{ GeV}$, un seul mode est autorisé et $R < 2.01 \cdot 10^{-21} \text{ cm}$. La température de reheating maximum est donnée dans le tableau (5.2), elle a pour valeur $1.45 \cdot 10^9 \text{ GeV}$. Au-dessus de cette température la densité de neutralinos est au-dessus de la limite observationnelle donnée en (5.15).

La figure (5.5) est le cas 2 pour des températures plus basses que $9.66 \cdot 10^6 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes diagonales est permise. Ceci signifie que R doit être suffisamment grand pour fournir la quantité nécessaire de matière noire mais pas plus grand que la valeur correspondant à la quantité maximale de matière noire autorisée. Si la contrainte des gravitons est prise en compte, la zone sous $R^{-1} = 1 \text{ TeV}$ est exclue.

Sans cette contrainte, R^{-1} devrait être compris entre 0.43 GeV et 0.57 GeV pour $T_R = 10^5 \text{ GeV}$: ce qui signifie que R devrait être compris entre $3.47 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$ et $4.58 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$.

Pour $T_R = 9.66 \cdot 10^6 \text{ GeV}$, R^{-1} est compris entre $7.02 \cdot 10^3 \text{ GeV}$ et $9.28 \cdot 10^3 \text{ GeV}$, et donc R , entre $2.13 \cdot 10^{-18} \text{ cm}$ et $2.81 \cdot 10^{-18} \text{ cm}$.

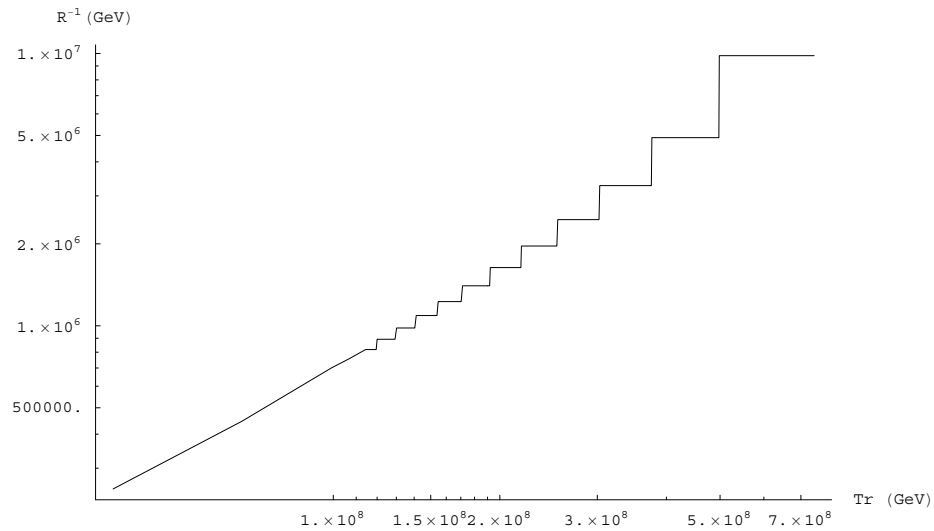


FIG. 5.4 – Cas 1. $4 \cdot 10^7 \text{ GeV} \leq T_R \leq 7.396 \cdot 10^8 \text{ GeV}$. La zone exclue est sous la courbe

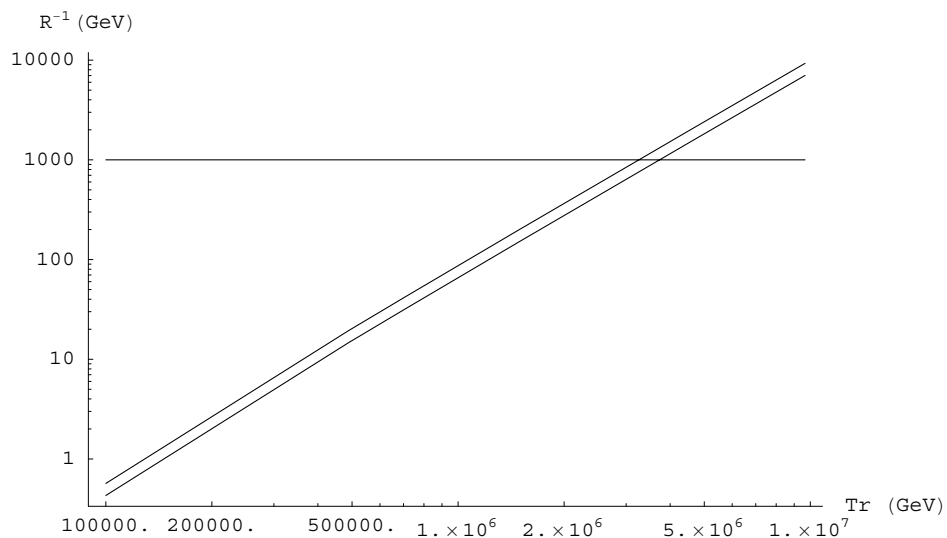


FIG. 5.5 – Cas 2. T_R plus petit que $9.66 \cdot 10^6 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes diagonales est autorisée. La zone sous la droite $R^{-1} = 1 \text{ TeV}$ est exclue si la contrainte des gravitons est prise en compte.

Avec la contrainte des gravitons, la valeur minimum pour R^{-1} est 1 TeV et donc la valeur maximum pour R est $1.97 \cdot 10^{-17}$ cm. On observe sur le graphe que ceci implique une valeur minimum pour T_R qui est $3.26 \cdot 10^6$ GeV. Les températures plus basses sont exclues.

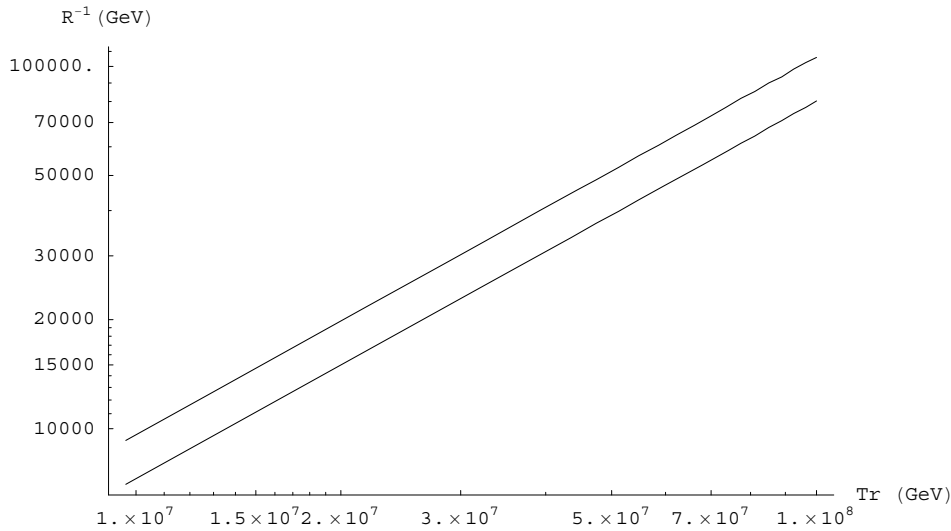


FIG. 5.6 – Cas 2. $9.66 \cdot 10^6 \text{ GeV} \leq T_R \leq 10^8 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes est autorisée.

La figure (5.6) est le cas 2 pour des températures comprises entre $9.66 \cdot 10^6$ GeV et 10^8 GeV. Seule la bande entre les deux courbes est autorisée.

Pour $T_R = 10^8$ GeV, R^{-1} est compris entre $8.03 \cdot 10^4$ GeV et $1.06 \cdot 10^5$ GeV donc R doit être entre $1.86 \cdot 10^{-19}$ cm et $2.46 \cdot 10^{-19}$ cm.

La figure (5.7) est le cas 2 pour des températures entre 10^8 GeV et $4.19 \cdot 10^9$ GeV. Seule la bande entre les deux courbes est autorisée.

Pour une température entre $3.70 \cdot 10^9$ GeV et $4.19 \cdot 10^9$ GeV, le nombre de mode doit être de 2 et R doit être égale à $2.05 \cdot 10^{-21}$ cm. Au-dessus de la température $4.19 \cdot 10^9$ GeV, seul un mode est permis et R doit être plus petit que $2.05 \cdot 10^{-21}$ cm.

La température maximale autorisée est donnée dans le tableau (5.2), elle a pour valeur $1.09 \cdot 10^{10}$ GeV. Au-dessus de cette température, la densité de neutralinos est au-dessus de la limite observationnelle donnée dans l'équation (5.15).

La figure (5.8) est le cas 3 pour des températures plus basses que $9.48 \cdot 10^6$ GeV. Seule la bande entre les deux courbes diagonales est autorisée. Si la contrainte des gravitons est

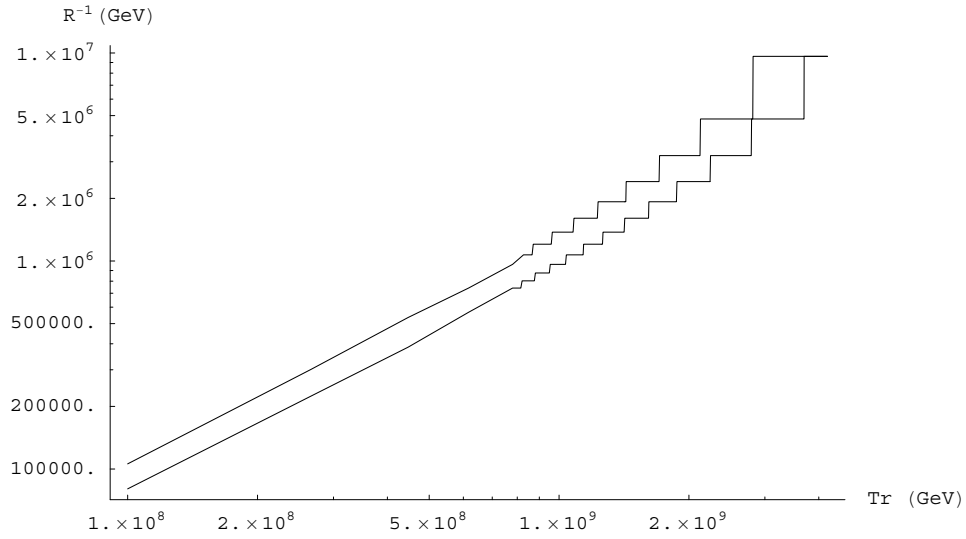


FIG. 5.7 – Cas $2.10^8 \text{ GeV} \leq T_R \leq 4.190 10^9 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes est autorisée.

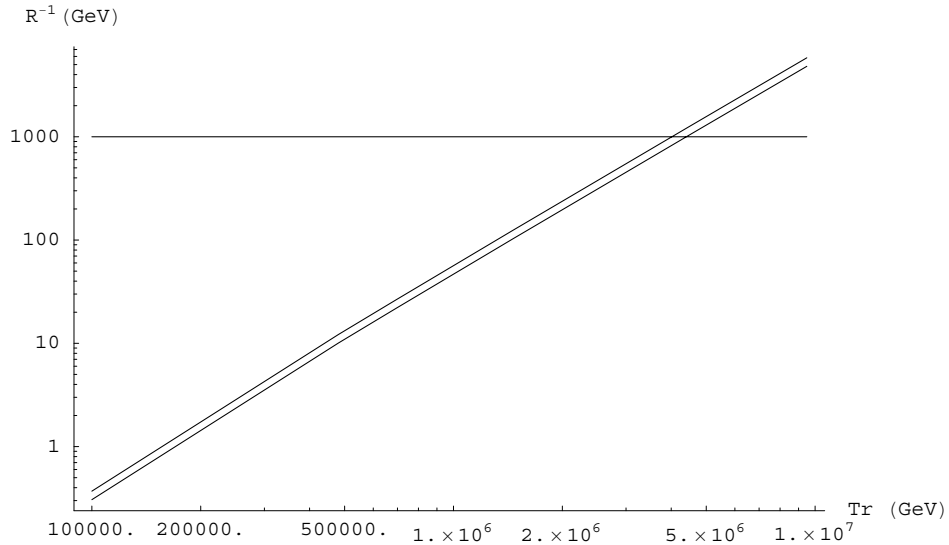


FIG. 5.8 – Case 3. T_R plus petit que $9.48 10^6 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux diagonales est autorisée. La zone sous la droite $R^{-1} = 1 \text{ TeV}$ est exclue si la contrainte sur les gravitons est prise en compte.

prise en compte, la zone sous $R^{-1} = 1 \text{ TeV}$ est exclue.

Pour $T_R = 9.48 \cdot 10^6 \text{ GeV}$, R^{-1} doit être compris entre $4.81 \cdot 10^3 \text{ GeV}$ et $5.82 \cdot 10^3 \text{ GeV}$, donc R doit être compris entre $3.39 \cdot 10^{-18} \text{ cm}$ et $4.10 \cdot 10^{-18} \text{ cm}$.

Avec la contrainte des gravitons, la valeur minimale pour R est $1.97 \cdot 10^{-17} \text{ cm}$. Nous observons sur le graphe que ceci implique une valeur minimum pour T_R , soit $4.02 \cdot 10^6 \text{ GeV}$. Les températures plus basses sont exclues.

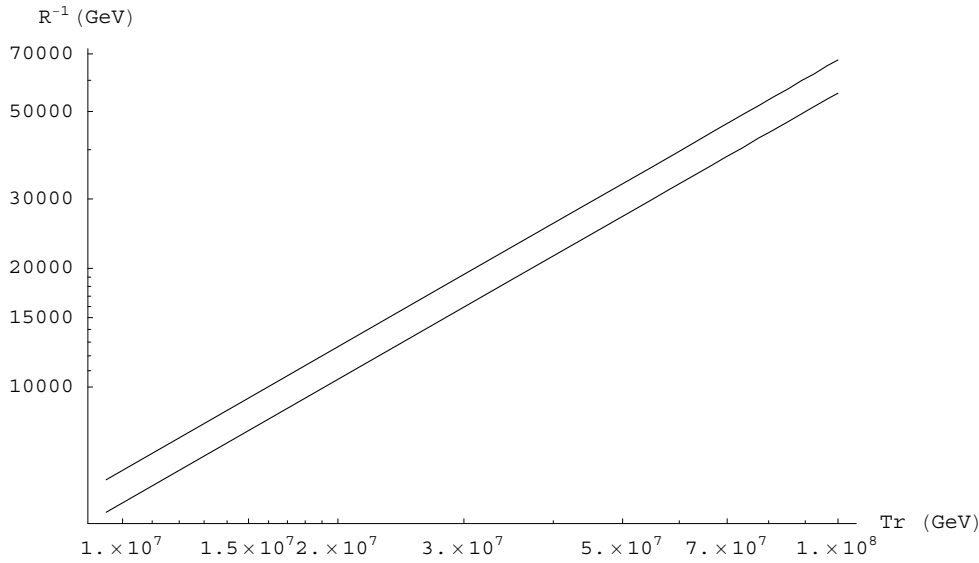


FIG. 5.9 – Cas 3. $9.48 \cdot 10^6 \text{ GeV} \leq T_R \leq 10^8 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes est autorisée.

Les figures (5.9) et (5.10) représentent le cas 3 pour des températures comprises entre $4.47 \cdot 10^6 \text{ GeV}$ et 10^8 GeV pour la figure (5.9) et entre 10^8 GeV et $2 \cdot 10^8 \text{ GeV}$ pour la figure (5.10). Seule la bande entre les courbes est autorisée.

Pour $T_R = 2 \cdot 10^8 \text{ GeV}$, R^{-1} est compris entre $1.15 \cdot 10^5 \text{ GeV}$ et $1.39 \cdot 10^5 \text{ GeV}$ donc R est compris entre $1.42 \cdot 10^{-19} \text{ cm}$ et $1.71 \cdot 10^{-19} \text{ cm}$.

La figure (5.11) est le cas 3 pour des températures comprises entre $2 \cdot 10^8 \text{ GeV}$ et $6.38 \cdot 10^9 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes est permise.

Pour une température comprise entre $5.17 \cdot 10^9 \text{ GeV}$ et $6.38 \cdot 10^9 \text{ GeV}$, le nombre de modes doit être de 2 et R doit être égale à $2.09 \cdot 10^{-21} \text{ cm}$.

Au-dessus de la température $6.38 \cdot 10^9 \text{ GeV}$, seule un mode est permis et R doit être plus petit que $2.09 \cdot 10^{-21} \text{ cm}$. La température de reheating maximum autorisée est donnée dans

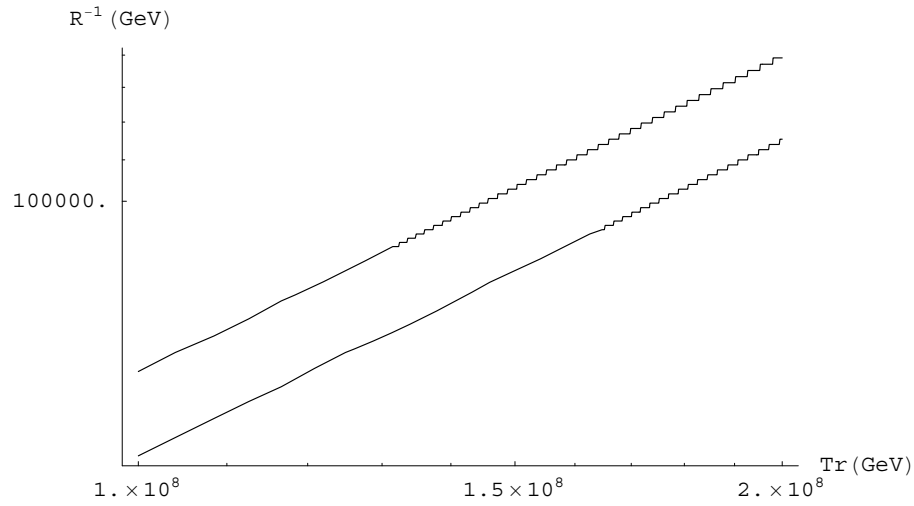


FIG. 5.10 – Cas 3. $10^8 \text{ GeV} \leq T_R \leq 2 \cdot 10^8 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes est autorisée.

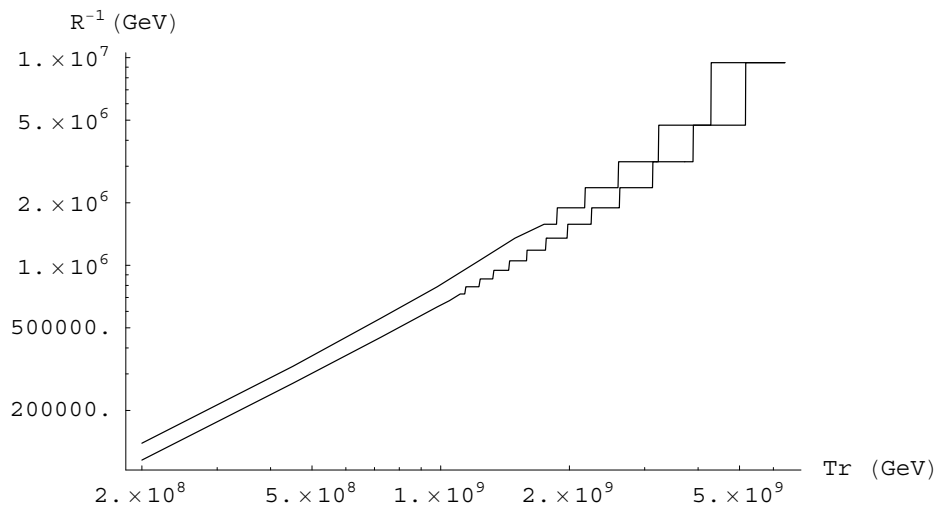


FIG. 5.11 – Cas 3. $2 \cdot 10^8 \text{ GeV} \leq T_R \leq 6.385 \cdot 10^9 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes est autorisée.

le tableau (5.2), elle a pour valeur $1.52 \cdot 10^{10}$ GeV. Au-dessus de cette température, la quantité de matière noire est au-dessus de la limite observationnelle donnée par l'équation (5.15).

Nous allons terminer ce paragraphe et ce chapitre en discutant de la possibilité de coannihilation de neutralinos. Ce phénomène pourrait être ennuyeux pour nos prévisions ; s'il a lieu, il concerne particulièrement les cas 3 et 2 où la quantité non thermique de neutralinos est supérieure à la quantité thermique. Nous avons donc réalisé la vérification sur le cas 3.

Si T_d qui est la température où se désintègre le gravitino, vérifie la condition $T_f > T_d > T_f \times (Y_{th}/Y_{3/2})$ alors les neutralinos s'annihilent pour donner des particules du modèle standard. Cette relation est vraie pour une seule particule d'abondance $Y_{3/2}$. Le point clé est que chaque mode de gravitino se désintègre à une température différente quand la quantité de neutralinos non thermiques n'est pas encore maximum. Cette quantité de neutralinos non thermiques évolue avec le temps pour atteindre son maximum quand tous les modes de gravitinos se sont désintégrés.

Nous devons donc évaluer si T_d^K pour le mode K (avec $k = 0$ pour le mode qui se désintègre⁵ au plus près de T_f) satisfait la condition $T_f > T_d^K > T_f \times \frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k}$.

Nous avons utilisé les valeurs trouvées pour R^{-1} et T_R dans le cas 3 et nous avons tracé les courbes T_f , $T_d(K)$, $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k}) = T_f \times (\frac{Y_{th}}{(K+1)Y_{3/2}^0})$ et $T_f \times (Y_{th}/Y_{3/2}^{Total})$ en prenant K comme une valeur réelle. K peut être vu comme le temps : quand K augmente, le temps augmente.

T_f and $T_f \times (Y_{th}/Y_{3/2}^{Total})$ sont de deux droites qui définissent une bande dans laquelle les deux autres courbes évoluent.

Nous avons tracé plusieurs courbes en faisant évoluer R^{-1} et T_R de la manière dont ils ont été trouvés évoluer dans nos courbes de contraintes.

La condition $T_f > T_d^K > T_f \times (Y_{th}/\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k)$ n'a été vérifiée que lorsque le nombre total de modes était inférieur 4. Ce qui implique que cette possibilité d'annihilation ne concerne qu'un mode (celui qui se désintègre au plus près de T_f) quand le nombre total de modes est de 3.

Ces processus d'annihilation peuvent donc être vus comme négligeables dans la représentation des courbes de contrainte entre T_R and R^{-1} .

Les figures (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) donnent toutes $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k})$ au-dessus de $T_d(K)$.

⁵La numérotation des modes est inversée dans ce cas d'étude.

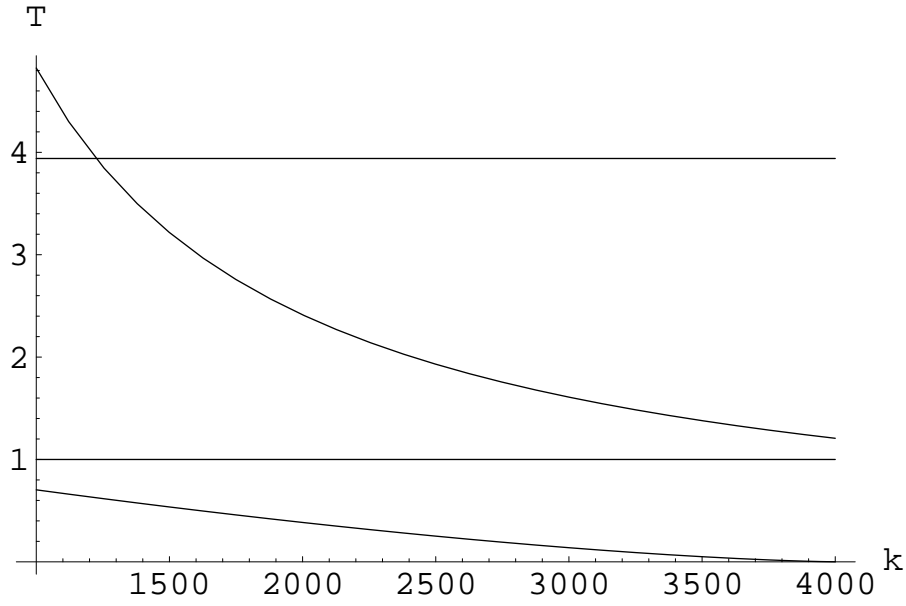


FIG. 5.12 – Cas $R^{-1} = 10^3$ GeV et $T_R = 4 \cdot 10^6$ GeV. $T_d(K)$ et $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k})$ en fonction de K . Les deux droites représentent T_f et $T_f \times (Y_{th}/Y_{3/2}^{Total})$. La courbe $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k})$ est au-dessus de la courbe $T_d(K)$.

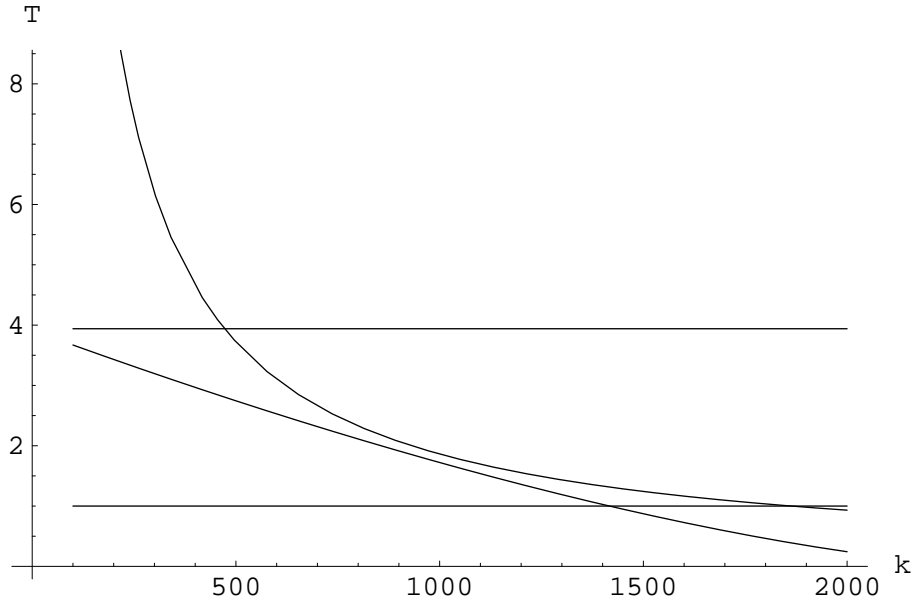


FIG. 5.13 – Cas $R^{-1} = 4 \cdot 10^3$ GeV et $T_R = 10^7$ GeV. $T_d(K)$ et $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k})$ en fonction de K . Les deux droites représentent T_f et $T_f \times (Y_{th}/Y_{3/2}^{Total})$. La courbe $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k})$ est au-dessus de la courbe $T_d(K)$.

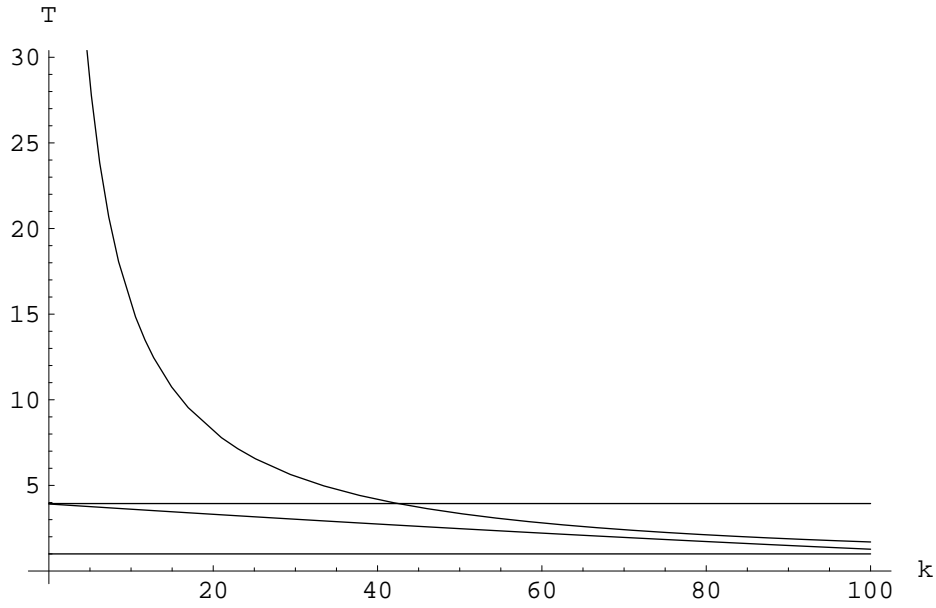


FIG. 5.14 – Cas $R^{-1} = 5 \cdot 10^4$ GeV et $T_R = 10^8$ GeV. $T_d(K)$ et $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k})$ en fonction de K . Les deux droites représentent T_f et $T_f \times (Y_{th}/Y_{3/2}^{Total})$. La courbe $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k})$ est au-dessus de la courbe $T_d(K)$.

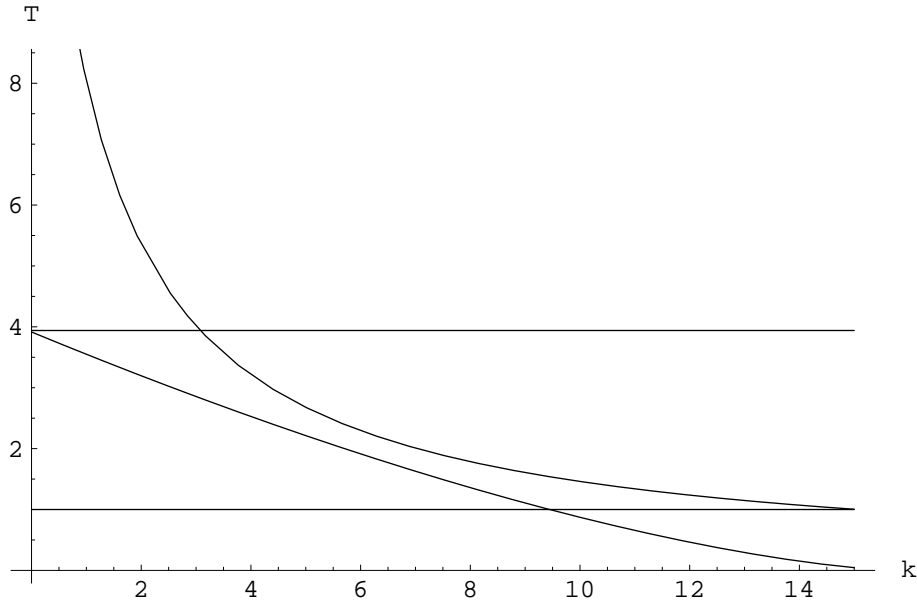


FIG. 5.15 – Cas $R^{-1} = 6 \cdot 10^5$ GeV et $T_R = 10^9$ GeV. $T_d(K)$ et $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k})$ en fonction de K . Les deux droites représentent T_f et $T_f \times (Y_{th}/Y_{3/2}^{Total})$. La courbe $T_f \times (\frac{Y_{th}}{\sum_{k=0}^K Y_{3/2}^k})$ est au-dessus de la courbe $T_d(K)$.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons tout d'abord traité de notions de cosmologie moderne, puis nous avons introduit des domaines de la physique au-delà du modèle standard : la supersymétrie et son extension locale, la supergravité, les dimensions supplémentaires et puis quelques éléments d'introduction aux théories de cordes.

Nous nous sommes ensuite attardé sur la supergravité et après avoir donné son Lagrangien et évoquer sa construction, nous nous sommes intéressés au gravitino, la particule de jauge de la supergravité. Nous avons étudié ces interactions avec les particules de jauge et de matière mais aussi, la construction d'outil comme la somme sur les états d'hélicité.

Ensuite, nous avons déterminé l'abondance primordiale de cette particule en supposant que sa production était faite par des processus de collisions inélastiques dans le bain thermique, processus, dont nous avons calculé la section efficace différentielle nécessaire au calcul de l'abondance. Nous avons ensuite déterminé une règle pour l'abondance de gravitinos de masses non négligeables par rapport à l'énergie du bain thermique.

Enfin, nous avons présenté un modèle cosmologique avec des hautes températures de reheating i.e 10^5 GeV à 10^{10} GeV, dans le contexte d'une supergravité à 5 dimensions avec l'extra-dimension compacte de type S^1/Z_2 , où les champs de matière et de jauge vivent sur une des deux membranes localisées aux points fixes de l'orbifold et où les champs de supergravité se propagent dans l'ensemble des dimensions spatiales.

Nous avons montré qu'il existe des courbes de contraintes entre la taille de l'extra-dimension R et la température de réchauffage (reheating) de l'Univers après la phase inflationnaire. Nous avons fait l'hypothèse que la matière noire est composée de la particule supersymétrique la plus légère (LSP) dans un modèle conservant la R -parité, particule que l'on suppose être le neutralino le plus léger.

Les contraintes trouvées viennent de l'hypothèse que la densité de neutralinos est la somme d'une production thermique et d'une production non thermique venant de la désintégration des modes de Kaluza-Klein du gravitino. Les gravitinos de ce modèle ne perturbent pas la nucléosynthèse primordiale des éléments légers puisque ces gravitinos sont suffisamment lourds pour se désintégrer avant que la nucléosynthèse ne débute.

Les gravitinos lourds sont naturels dans des classes de modèles de brisure de la supersymétrie, comme par exemple, les modèles de médiation de la brisure de supersymétrie du secteur caché au secteur observable par des anomalies, ou par des anomalies et un mécanisme de Scherk-Schwarz.

Le contexte de ce travail peut être rattaché à la M-théorie d'Horava-Witten dans laquelle l'Univers a pu connaître une étape à cinq dimensions dans laquelle les champs du bulk sont des champs de supergravité, mais aussi aux théories de Baryogénèse via Leptogénèse qui impliquent de hautes températures de reheating.

Les résultats que nous obtenons sont indépendants du spectre de masse des particules supersymétriques puisque le gravitino est suffisamment lourd pour rendre négligeable l'influence des autres particules supersymétriques. Les résultats montrent que la taille du rayon R n'est pas seulement borné supérieurement mais aussi inférieurement pour une large gamme de valeurs de la quantité thermique de neutralinos et pour une large gamme de valeur pour la température de reheating. Des modes de Kaluza-Klein pour les gravitons sont aussi présents et sont susceptibles de perturber la nucléosynthèse. Nous avons vérifié que cela n'était pas le cas, avec une méthode approximative, tant que $R^{-1} \geq 1$ TeV. Nous avons aussi constaté que cette nouvelle contrainte implique que la température de reheating ne peut pas être plus basse qu'une certaine valeur dans les cas où le rayon est borné inférieurement et supérieurement.

Les perspectives de ce travail sont :

- une extension à d'autres modèles d'extra-dimension comme le modèle de Randall-Sundrum supersymétrique, qui permet la présence d'une constante cosmologique non nulle,
- l'impact sur les résultats de l'inclusion de corrections thermiques [56] au calcul de l'abondance.
- un calcul de l'impact des désintégrations de gravitons de Kaluza-Klein (dans un modèle pas forcément supersymétrique) sur la nucléosynthèse primordiale, pour d'une part, déterminer s'il existe un rayon limite au-delà duquel la nucléosynthèse est perturbée et pour, d'autre part, évaluer l'impact sur l'abondance primordiale d'éléments comme le Lithium 6 et 7. Les premières simulations laissent penser que la présence de ces désintégrations de gravitons, permet d'engendrer une quantité primordiale de Lithium 6 et 7, compatible avec les observations, chose que ne permet pas la théorie de la nucléosynthèse.
- une étude d'un possible mélange, matière noire froide - matière noire tiède, la matière noire froide étant engendrée par les neutralinos produits thermiquement et la matière noire tiède par les neutralinos produits par désintégration de gravitinos. Si l'on montre que les neutralinos produits par désintégration sont effectivement tièdes au moment de la formation des structures, on pourrait utiliser les simulations de halos de matière noire et de gaz développées par [67] pour voir les conséquences d'un tel mélange sur la formation des structures ; en effet, un modèle de matière noire purement froide ne permet pas d'expliquer certaines structures.

Chapitre 7

Annexe : cas $m_{lsp} = 200$ GeV

Cases	x_f	$T_f(\text{GeV})$	$\Omega_{th} h^2$	$(\Delta\Omega_{th} h^2)_{min}$	$(\Delta\Omega_{th} h^2)_{max}$	$M_n(\text{GeV})$	$T_R^{max}(\text{GeV})$
Cas 1	29.32	6.82	0.114	-	0.009	1.37×10^7	8.84×10^8
Cas 2	29.6194	6.7523	0.087	0.019	0.036	1.36×10^7	3.45×10^9
Cas 3	29.91	6.69	0.066	0.040	0.057	1.35×10^6	5.37×10^9

TAB. 7.1 – Les trois cas numériques pour $m_{lsp} = 200$ GeV

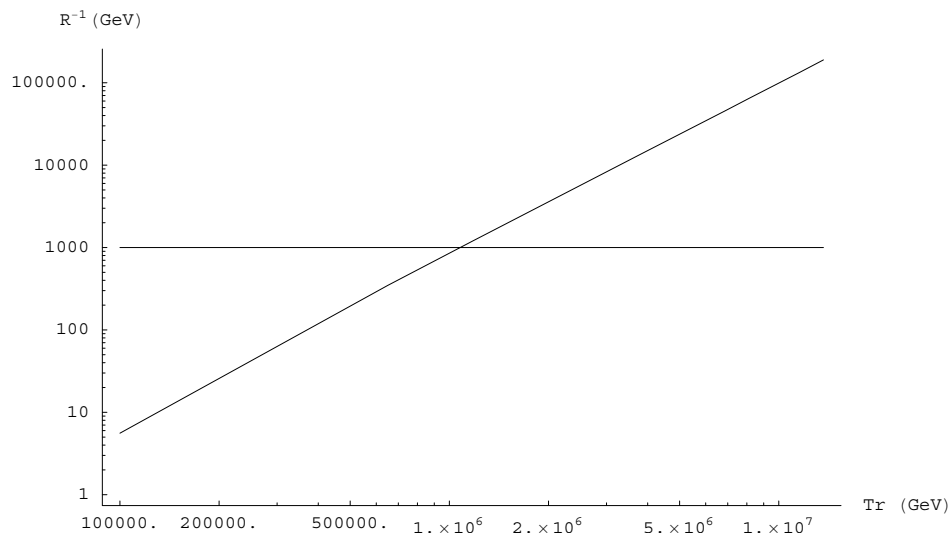


FIG. 7.1 – Cas 1 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. $T_R \leq 1.37 \cdot 10^7$ GeV. La zone sous la courbe est exclue.

Les figures (7.1), (7.2) et (7.3) représentent le cas 1 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. Nous remarquons que les courbes de ce cas sont au-dessus des courbes pour le cas 1 avec $m_{lsp} = 120$ GeV. On peut expliquer cela en analysant l'équation (5.24) : on remarque que R^{-1} est pratiquement proportionnelle à m_{lsp} . Physiquement, cela signifie que si l'énergie élémentaire

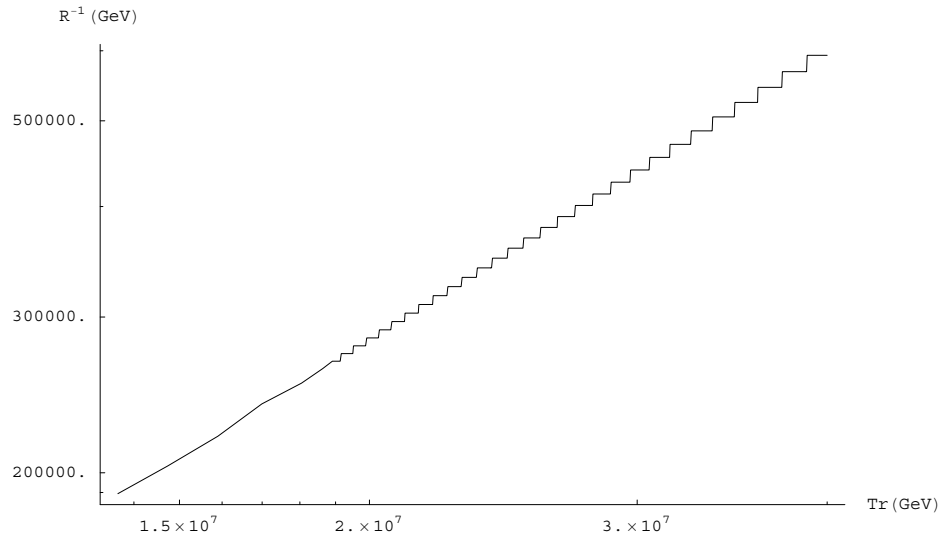


FIG. 7.2 – Cas 1 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. $1.37 \cdot 10^7 \text{ GeV} \leq T_R \leq 4 \cdot 10^7 \text{ GeV}$. La zone sous la courbe est exclue.

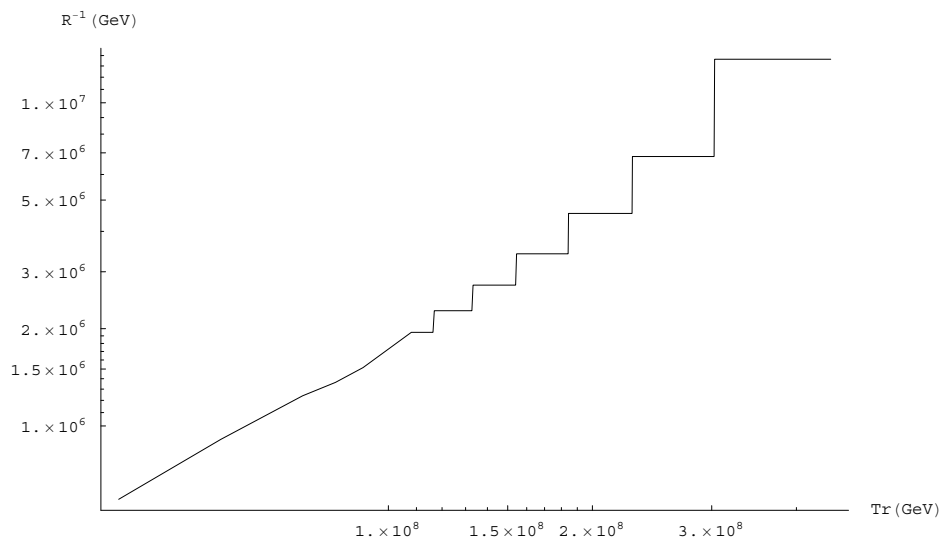


FIG. 7.3 – Cas 1 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. $4 \cdot 10^7 \text{ GeV} \leq T_R \leq 4.49 \cdot 10^8 \text{ GeV}$. La zone sous la courbe est exclue.

d'un LSP augmente, un nombre plus faible de LSP est requis et donc R^{-1} peut être plus grand. $M_{\tilde{n}}$, T_f et la température de reheating maximum sont légèrement différents du cas avec $m_{lsp} = 120$ GeV (voir le tableau 7.1).

Les figures du cas 2 (fig.7.4 à fig.7.7) et du cas 3 (fig.7.8 à fig.7.10) pour $m_{lsp} = 200$ GeV ont le même comportement générale que les cas 2 et 3 pour $m_{lsp} = 120$ GeV mais les courbes sont au-dessus de celles tracées pour $m_{lsp} = 120$ GeV. Pour le cas 2, la température de reheating minimum est $1.55 \cdot 10^6$ GeV si la contrainte sur les gravitons est prise en compte (voir fig.7.4). Pour le cas 3, la température de reheating minimum est $2.22 \cdot 10^6$ GeV (voir fig.7.8).

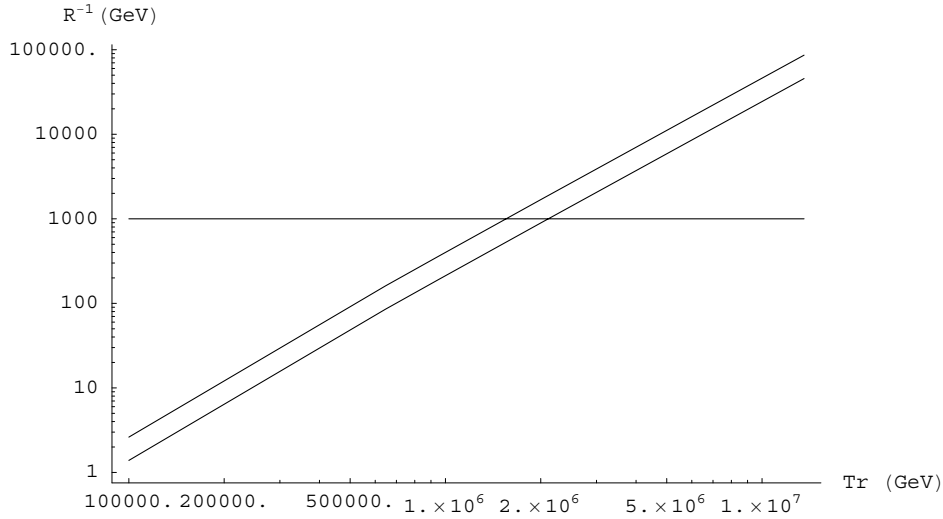


FIG. 7.4 – Cas 2 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. T_R plus petit que $1.36 \cdot 10^7$ GeV. Seule la bande entre les deux courbes diagonales est autorisée. La zone sous la droite $R^{-1} = 1$ TeV est exclu si la contrainte sur les gravitons est prise en compte.

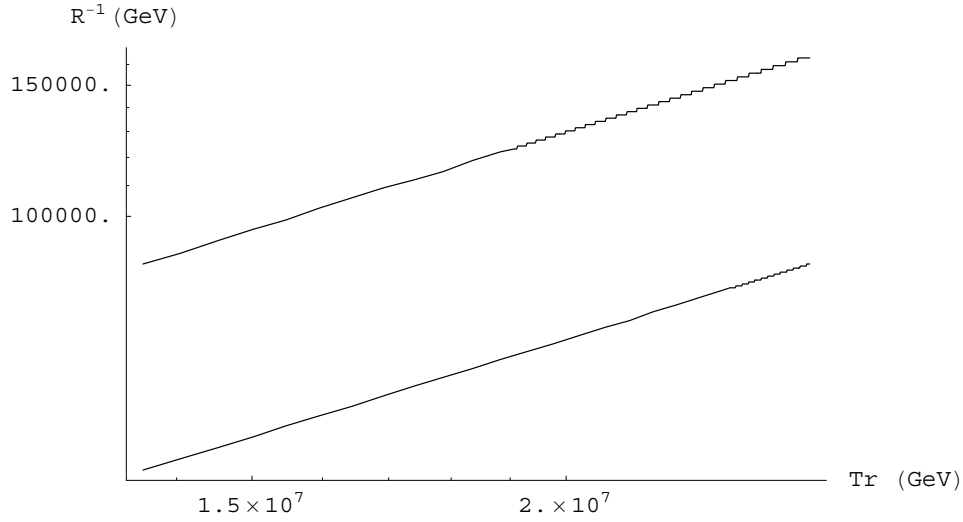


FIG. 7.5 – Cas 2 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. $1.36 \cdot 10^7 \text{ GeV} \leq T_R \leq 2.5 \cdot 10^7 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes diagonales est autorisée.

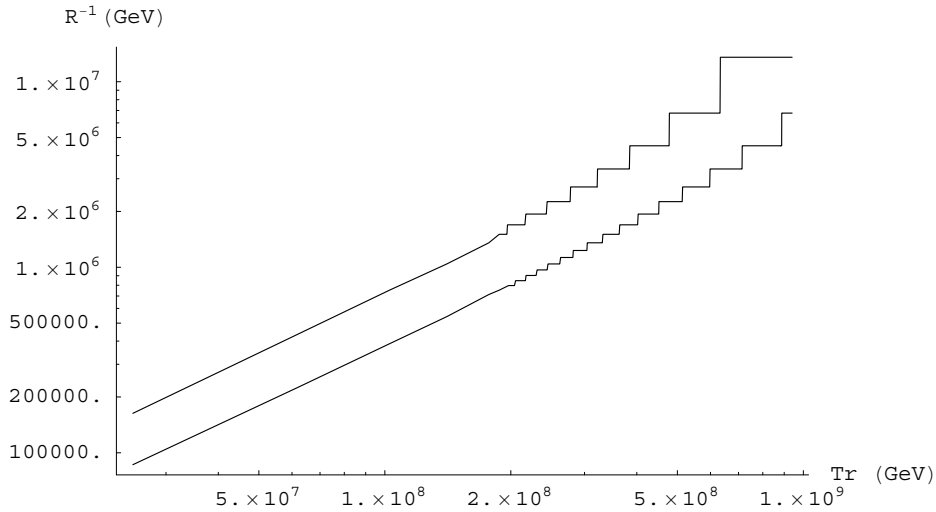


FIG. 7.6 – Cas 2 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. $2.5 \cdot 10^7 \text{ GeV} \leq T_R \leq 9.40 \cdot 10^8 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes diagonales est autorisée.

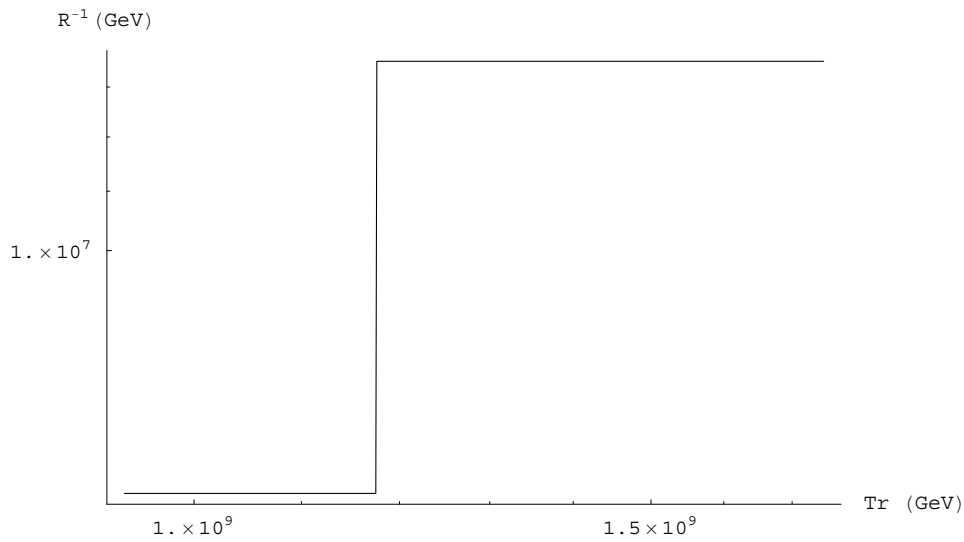


FIG. 7.7 – Cas 2 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. $9.40 \cdot 10^8 \text{ GeV} \leq T_R \leq 1.75 \cdot 10^9 \text{ GeV}$. La zone sous la courbe est exclue.

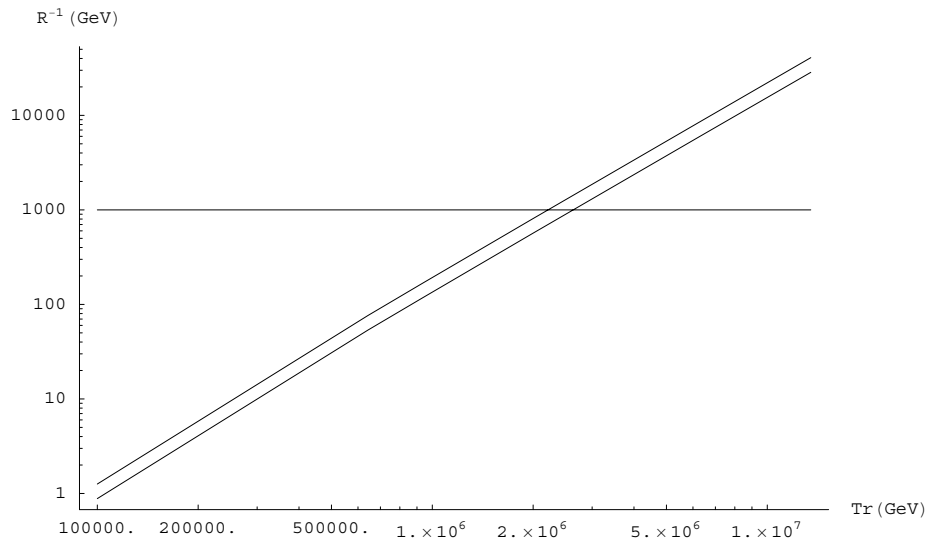


FIG. 7.8 – Cas 3 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. T_R plus petit que $1.35 \cdot 10^7 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes diagonales est autorisée. La zone sous la droite $R^{-1} = 1 \text{ TeV}$ est exclue si la contrainte sur les gravitons est prise en compte.

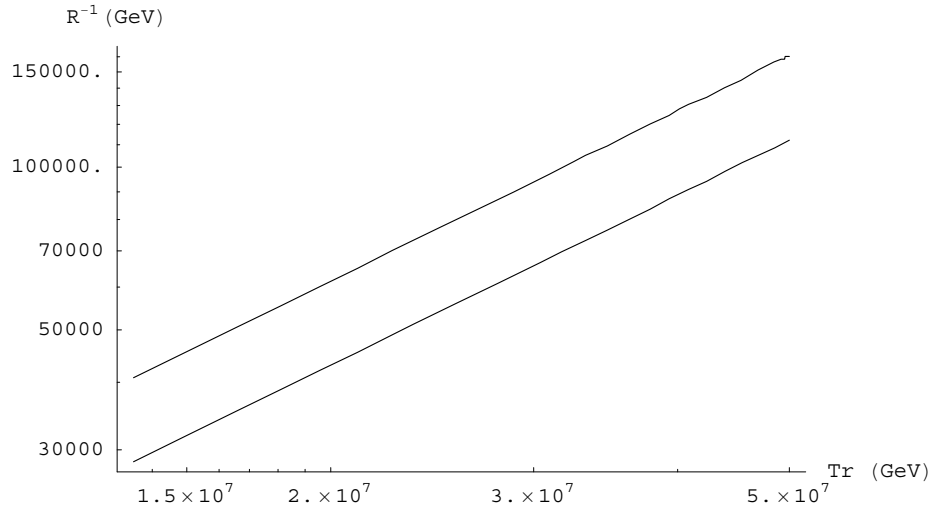


FIG. 7.9 – Cas 3 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. $1.35 \cdot 10^7 \text{ GeV} \leq T_R \leq 5 \cdot 10^7 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes diagonales est autorisée.

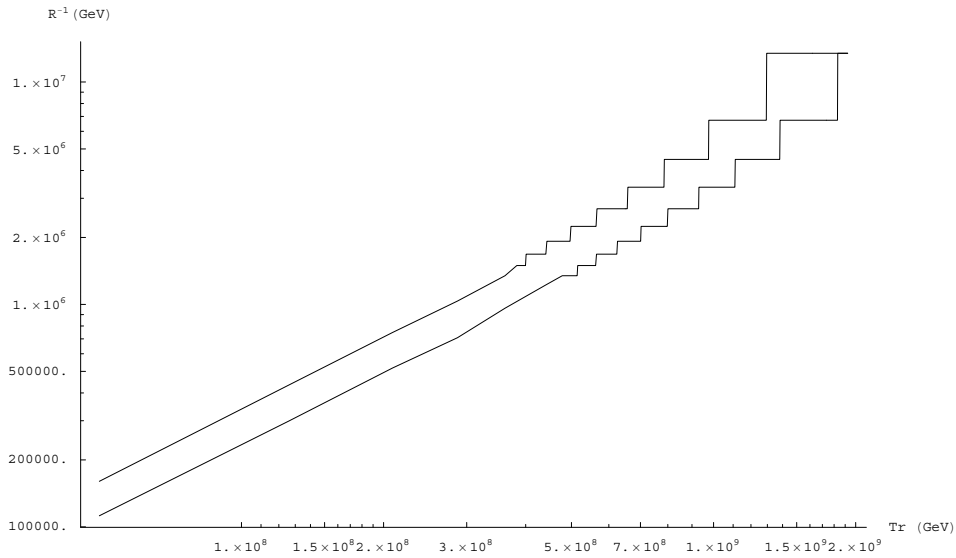


FIG. 7.10 – Cas 3 pour $m_{lsp} = 200$ GeV. $5 \cdot 10^7 \text{ GeV} \leq T_R \leq 1.92 \cdot 10^9 \text{ GeV}$. Seule la bande entre les deux courbes diagonales est autorisée.

Bibliographie

- [1] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results : Implications for cosmology,” *Astrophys. J. Suppl.* **170** (2007) 377 [arXiv :astro-ph/0603449].
- [2] U. Seljak, A. Slosar and P. McDonald, “Cosmological parameters from combining the Lyman-alpha forest with CMB, galaxy clustering and SN constraints,” *JCAP* **0610**, 014 (2006) [arXiv :astro-ph/0604335].
- [3] M. Milgrom, “A Modification Of The Newtonian Dynamics As A Possible Alternative To The Hidden Mass Hypothesis,” *Astrophys. J.* **270**, 365 (1983).
- [4] G. Servant and T. M. P. Tait, “Is the lightest Kaluza-Klein particle a viable dark matter candidate ?,” *Nucl. Phys. B* **650**, 391 (2003) [arXiv :hep-ph/0206071].
- [5] T. Asaka and M. Shaposhnikov, “The nuMSM, dark matter and baryon asymmetry of the universe,” *Phys. Lett. B* **620**, 17 (2005) [arXiv :hep-ph/0505013].
- [6] P. Horava and E. Witten, “Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary,” *Nucl. Phys. B* **475**, 94 (1996) [arXiv :hep-th/9603142].
- [7] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998) [arXiv :hep-ph/9803315].
- [8] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV,” *Phys. Lett. B* **436**, 257 (1998) [arXiv :hep-ph/9804398].
- [9] L. Randall and R. Sundrum, “A large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999) [arXiv :hep-ph/9905221].
- [10] A. Falkowski, Z. Lalak and S. Pokorski, “Four dimensional supergravities from five dimensional brane worlds,” *Nucl. Phys. B* **613**, 189 (2001) [arXiv :hep-th/0102145].
- [11] M. Zucker, “Supersymmetric brane world scenarios from off-shell supergravity,” *Phys. Rev. D* **64**, 024024 (2001) [arXiv :hep-th/0009083].
- [12] R. Altendorfer, J. Bagger and D. Nemeschansky, “Supersymmetric Randall-Sundrum scenario,” *Phys. Rev. D* **63**, 125025 (2001) [arXiv :hep-th/0003117].
- [13] T. Gherghetta and A. Pomarol, “A warped supersymmetric standard model,” *Nucl. Phys. B* **602**, 3 (2001) [arXiv :hep-ph/0012378].
- [14] T. Gherghetta and A. Pomarol, “Bulk fields and supersymmetry in a slice of AdS,” *Nucl. Phys. B* **586**, 141 (2000) [arXiv :hep-ph/0003129].

- [15] P. Brax and C. van de Bruck, “Cosmology and brane worlds : A review,” *Class. Quant. Grav.* **20**, R201 (2003) [arXiv :hep-th/0303095].
- [16] P. Binetruy, C. Deffayet and D. Langlois, “Non-conventional cosmology from a brane-universe,” *Nucl. Phys. B* **565**, 269 (2000) [arXiv :hep-th/9905012].
- [17] J. M. Cline, C. Grojean and G. Servant, “Cosmological expansion in the presence of extra dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4245 (1999) [arXiv :hep-ph/9906523].
- [18] C. Csaki, M. Graesser, L. Randall and J. Terning, “Cosmology of brane models with radion stabilization,” *Phys. Rev. D* **62**, 045015 (2000) [arXiv :hep-ph/9911406].
- [19] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early universe,” *Front. Phys.* **69**, 1 (1990).
- [20] K. Jedamzik, K. Y. Choi, L. Roszkowski and R. Ruiz de Austri, “Solving the cosmic lithium problems with gravitino dark matter in the JCAP **0607**, 007 (2006) [arXiv :hep-ph/0512044].
- [21] K. Jedamzik, “Neutralinos and Big Bang nucleosynthesis,” *Phys. Rev. D* **70**, 083510 (2004) [arXiv :astro-ph/0405583].
- [22] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], “Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae,” *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999) [arXiv :astro-ph/9812133].
- [23] I. Zlatev, L. M. Wang and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1999) [arXiv :astro-ph/9807002].
- [24] P. J. Steinhardt, L. M. Wang and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999) [arXiv :astro-ph/9812313].
- [25] K. Kohri, T. Moroi and A. Yotsuyanagi, “Big-bang nucleosynthesis with unstable gravitino and upper bound on the reheating temperature,” *Phys. Rev. D* **73**, 123511 (2006) [arXiv :hep-ph/0507245].
- [26] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt and N. Turok, “The ekpyrotic universe : Colliding branes and the origin of the hot big bang,” *Phys. Rev. D* **64**, 123522 (2001) [arXiv :hep-th/0103239].
- [27] D. Bailin and A. Love, “Supersymmetric gauge field theory and string theory,” *Bristol, UK : IOP (1994) 322 p. (Graduate student series in physics)*
- [28] H. P. Nilles, M. Olechowski and M. Yamaguchi, “Supersymmetry breakdown at a hidden wall,” *Nucl. Phys. B* **530**, 43 (1998) [arXiv :hep-th/9801030].
- [29] L. Randall and R. Sundrum, “Out of this world supersymmetry breaking,” *Nucl. Phys. B* **557**, 79 (1999) [arXiv :hep-th/9810155].
- [30] M. Kaku, “Introduction to superstrings and M-theory,” *New York, USA : Springer (1999) 587 p*
- [31] H. P. Nilles, “Gaugino condensation and SUSY breakdown,” arXiv :hep-th/0402022.
- [32] K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, “Extra spacetime dimensions and unification,” *Phys. Lett. B* **436**, 55 (1998) [arXiv :hep-ph/9803466].

- [33] A. Anisimov, T. Banks, M. Dine and M. Graesser, “Comments on non-commutative phenomenology,” *Phys. Rev. D* **65**, 085032 (2002) [arXiv :hep-ph/0106356].
- [34] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity,” *Princeton, USA : Univ. Pr. (1992)* 259 p
- [35] A. Brignole, L. E. Ibanez and C. Munoz, “Soft supersymmetry-breaking terms from supergravity and superstring models,” arXiv :hep-ph/9707209.
- [36] P. R. Auvil and J. J. Brehm *Phys. Rev.* **145**, 1152 (1966).
- [37] S. Weinberg, “The quantum theory of fields. Vol. 3 : Supersymmetry,” *Cambridge, UK : Univ. Pr. (2000)* 419 p
- [38] M. Bolz, A. Brandenburg and W. Buchmuller, “Thermal Production of Gravitinos,” *Nucl. Phys. B* **606**, 518 (2001) [arXiv :hep-ph/0012052].
- [39] P. Fayet, *Phys. Lett. B* **84** , 421 (1979).
- [40] R. Casalbuoni, S. De Curtis, D. Dominici, F. Feruglio and R. Gatto, “A Gravitino - Goldstino High-Energy Equivalence Theorem,” *Phys. Lett. B* **215**, 313 (1988).
- [41] K. Kohri, T. Moroi and A. Yotsuyanagi, “Big-bang nucleosynthesis with unstable gravitino and upper bound on the reheating temperature,” *Phys. Rev. D* **73**, 123511 (2006) [arXiv :hep-ph/0507245].
- [42] D. Gherson, “Constraints on the size of the extra dimension from Kaluza-Klein gravitino decay,” *Phys. Rev. D* **76**, 043507 (2007).
- [43] M. Kawasaki, K. Kohri and T. Moroi, “Big-bang nucleosynthesis and hadronic decay of long-lived massive particles,” *Phys. Rev. D* **71**, 083502 (2005) [arXiv :astro-ph/0408426].
- [44] A. Denner, H. Eck, O. Hahn and J. Kublbeck, “Feynman rules for fermion number violating interactions,” *Nucl. Phys. B* **387**, 467 (1992).
- [45] J. R. Ellis, J. E. Kim and D. V. Nanopoulos, “Cosmological Gravitino Regeneration And Decay,” *Phys. Lett. B* **145**, 181 (1984).
- [46] T. Lee and G. H. Wu, “Interactions of a single Goldstino,” *Phys. Lett. B* **447**, 83 (1999) [arXiv :hep-ph/9805512].
- [47] M. Kawasaki and T. Moroi, “Gravitino production in the inflationary universe and the effects on big bang nucleosynthesis,” *Prog. Theor. Phys.* **93**, 879 (1995) [arXiv :hep-ph/9403364].
- [48] E. Braaten and T. C. Yuan, “Calculation of screening in a hot plasma,” *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2183 (1991).
- [49] D. Comelli and J. R. Espinosa, “Bosonic thermal masses in supersymmetry,” *Phys. Rev. D* **55**, 6253 (1997) [arXiv :hep-ph/9606438].
- [50] J. Bagger, F. Feruglio and F. Zwirner, “Brane induced supersymmetry breaking,” *JHEP* **0202**, 010 (2002) [arXiv :hep-th/0108010].

- [51] S. De Curtis, D. Dominici and J. R. Pelaez, “Equivalence between Kaluza Klein modes of gravitinos and Goldstinos in brane induced supersymmetry breaking,” *JHEP* **0401**, 052 (2004) [arXiv :hep-th/0311226].
- [52] S. Hannestad, “Strong constraint on large extra dimensions from cosmology,” *Phys. Rev. D* **64**, 023515 (2001) [arXiv :hep-ph/0102290].
- [53] R. Rattazzi, C. A. Scrucca and A. Strumia, “Brane to brane gravity mediation of supersymmetry breaking,” *Nucl. Phys. B* **674**, 171 (2003) [arXiv :hep-th/0305184].
- [54] T. Gherghetta, G. F. Giudice and J. D. Wells, “Phenomenological consequences of supersymmetry with anomaly-induced masses,” *Nucl. Phys. B* **559**, 27 (1999) [arXiv :hep-ph/9904378].
- [55] T. Han, J. D. Lykken and R. J. Zhang, “On Kaluza-Klein states from large extra dimensions,” *Phys. Rev. D* **59**, 105006 (1999) [arXiv :hep-ph/9811350].
- [56] V. S. Rychkov and A. Strumia, “Thermal production of gravitinos,” arXiv :hep-ph/0701104.
- [57] M. Endo, K. Hamaguchi and F. Takahashi, “Moduli / inflaton mixing with supersymmetry breaking field,” *Phys. Rev. D* **74**, 023531 (2006) [arXiv :hep-ph/0605091].
- [58] M. Endo, K. Hamaguchi and F. Takahashi, “Moduli-induced gravitino problem,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 211301 (2006) [arXiv :hep-ph/0602061].
- [59] J. R. Ellis, N. C. Tsamis and M. B. Voloshin, “COULD A DILATON SOLVE THE COSMOLOGICAL CONSTANT PROBLEM?,” *Phys. Lett. B* **194**, 291 (1987).
- [60] J. Pradler and F. D. Steffen, “Thermal gravitino production and collider tests of leptogenesis,” *Phys. Rev. D* **75**, 023509 (2007) [arXiv :hep-ph/0608344].
- [61] J. Pradler and F. D. Steffen, “Constraints on the reheating temperature in gravitino dark matter scenarios,” arXiv :hep-ph/0612291.
- [62] K. Kohri, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, “Neutralino dark matter from heavy gravitino decay,” *Phys. Rev. D* **72**, 083510 (2005) [arXiv :hep-ph/0502211].
- [63] M. Ibe, R. Kitano, H. Murayama and T. Yanagida, “Viable supersymmetry and leptogenesis with anomaly mediation,” *Phys. Rev. D* **70**, 075012 (2004) [arXiv :hep-ph/0403198].
- [64] N. Kaloper, J. March-Russell, G. D. Starkman and M. Trodden, “Compact hyperbolic extra dimensions : Branes, Kaluza-Klein modes and Phys. Rev. Lett. **85**, 928 (2000) [arXiv :hep-ph/0002001].
- [65] L. J. Hall and D. R. Smith, “Cosmological constraints on theories with large extra dimensions,” *Phys. Rev. D* **60**, 085008 (1999) [arXiv :hep-ph/9904267].
- [66] K. Jedamzik, “Big bang nucleosynthesis constraints on hadronically and electromagnetically decaying relic neutral particles,” *Phys. Rev. D* **74**, 103509 (2006) [arXiv :hep-ph/0604251].
- [67] S. Peirani, F. Durier and J. A. De Freitas Pacheco, “Evolution of the Phase-Space Density of Dark Matter Halos and Mixing Effects in Merger Events,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **367**, 1011 (2006) [arXiv :astro-ph/0512482].